

**ОБ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ:  
ОТ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ОСОБЫХ ТОЧЕК  
ДО ПОСТРОЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ**

*Мартышко П.С.* – Институт геофизики УрО РАН им. Ю.П. Булашевича, Екатеринбург

**Аннотация.** В апреле этого года исполнилось 60 лет с момента создания лаборатории математической геофизики Института геофизики УФАИ (ныне УрО РАН). В настоящей статье изложена кратко история развития лаборатории и представлены основные результаты, полученные ее сотрудниками.

Лаборатория математической геофизики была создана в составе Института геофизики УФАИ в 1961г. Перед лабораторией была поставлена задача разработки математической теории и методов интерпретации геофизических полей. В это время активно развивалась теория решения некорректных задач, математические основы которой были заложены трудами А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева, В.К. Иванова. Первый заведующий – выпускник отделения астрономо-геодезии физико-математического факультета Свердловского государственного университета, доктор физ.-мат. наук Георгий Митрофанович Воскобойников (Мартышко, Шестаков, 2013) возглавлял лабораторию до 1981 г. В этот период формируются научные направления исследований лаборатории, одно из которых связано с проблемой решения обратных задач теории потенциала и разработкой математических методов интерпретации аномалий потенциальных геофизических полей. Работы Георгия Митрофановича в этом направлении посвящены исследованию возможностей применения функции Карлемана для локализации источников потенциального поля по исходным данным, заданным на ограниченной части профиля или поверхности наблюдений. Г.М. Воскобойников теоретически развил один из подходов к решению обратных задач теории потенциала, имеющих геофизические приложения (Воскобойников, 1962; Воскобойников, Начапкин, 1969, 1980). Использование формализма функции Карлемана (обладающей «гасящими» свойствами) позволило Г.М. Воскобойникову получить ряд интересных с практической точки зрения результатов. Одним из них является устойчивое решение задачи локализации наименьшей (в некотором классе) области особенностей двумерного потенциального поля, ближайшей к поверхности Земли. Другим – ре-

шение задачи об определении гармонических моментов (массы, координаты центра тяжести и высших моментов) локальных источников потенциала. Для решения двумерной обратной задачи потенциальных полей Г.М. Воскобойниковым предложен «метод особых точек»; в дальнейшем Г.М. Воскобойниковым с Николаем Ивановичем Начапкиным был разработан устойчивый алгоритм решения задачи локализации особенностей гравимагнитных полей, установлена взаимосвязь между формой двумерных аномалиеобразующих объектов и параметрами ближайших особых точек (Воскобойников, Начапкин, 1969, 1980), совместно с Алексеем Федоровичем Шестаковым метод особых точек был обобщен на случай трехмерных геофизических полей (Воскобойников, Шестаков, 1982, 1984), описываемых дифференциальными уравнениями Лапласа, Гельмгольца и Ламе. Математическую основу трехмерного подхода также составили интегральные преобразования элементов поля с ядром из гасящих функций, позволяющих проводить интегрирование по ограниченному участку поверхности, на котором известны исходные данные задачи – «данные Коши» – значения элемента исследуемого поля и его производной по нормали к поверхности, отождествляемой с границей раздела земля-воздух (Воскобойников, Шестаков, 1984). Практически оказывается, что для их формирования достаточно иметь геофизические данные измерений одной составляющей потенциального поля (гравитационного или магнитного), либо двух составляющих напряженности электромагнитного поля, возбуждаемого в гармоническом режиме.

Следует отметить также полученные в этот период результаты О.А. Хачай - решение единой обратной задачи электромагнитных

зондирований для одномерной среды, разработка алгоритма и программы решения прямой электромагнитной трёхмерной задачи для горизонтально слоистой среды с включением (Хачай, 1978, 1980), В.Б. Сурнева – алгоритм решения задачи рассеяния упругих волн локализованной неоднородностью, Ю.М. Гуревича, программно реализовавшего алгоритм решения прямой задачи электроразведки постоянным током и внёсшего большой вклад в развитие метода заряда с измерением магнитного поля. Под руководством Г.М. Воскобойникова защитили кандидатские диссертации А.В. Цирульский, Н.И. Начапкин (с 1980 г. по 2016г. – ученый секретарь Института), О.А. Хачай (ныне доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории скважинной геофизики), А.Ф. Шестаков (ныне доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией экологической геофизики).

Г.М. Воскобойников всегда относился критически к работам, выходящим не только из недр лаборатории, но также и к тем, что «попадались» ему на глаза. В частности, в ряде работ (Воскобойников, 1954, 1955) им выполнен критический разбор и показана несостоятельность некоторых ошибочных теоретических выводов и рекомендаций, проникших в научную и учебную литературу в области гравиметрии, магнитометрии и радиометрии. В последующие годы, уже в пенсионном возрасте, Георгий Митрофанович продолжал активно работать в качестве научного консультанта, способствуя становлению многих идей и концепций у своих коллег и учеников, формированию у них научного мировоззрения и до конца своей жизни (31 августа 1990 г.) оставался преданным геофизике, требовательным к себе и окружающим в отношении уровня научных исследований. Столетию со дня рождения Г.М. Воскобойникова был посвящен номер №1(21) 2013 года Уральского геофизического вестника, где коллеги и ученики подробно рассказали о его творческом пути и научных результатах.

С 1981 г. по 1990 г. лабораторией руководил доктор физ.-мат. наук Александр Вениаминович Цирульский, также выпускник физико-математического факультета Уральского государственного университета, отделения математики (1958 г.).

Учителями Александра Вениаминовича были два выдающихся ученых – математик Валентин Константинович Иванов – член-корреспондент АН СССР, один из основоположников теории некорректных задач, много занимавшийся вопросами теории потенциала – и геофизик Георгий Митрофанович Воскобойников. В.К. Иванов привил Александру Вениаминовичу склонность к строгим математическим построениям, Г.М. Воскобойников сформировал его понимание геофизической сущности математических проблем. Александр Вениаминович также считал своим Учителем друга и коллегу Владимира Николаевича Страхова. Основные достижения А.В. Цирульского изложены в работах (Цирульский, 1962, 1963, 1964, 1968, 1972, 1974а, 1974б, 1990; Цирульский, Никонова, 1975; Никонова, Цирульский, 1975, 1978; Федорова, Цирульский, 1976, 1978; Цирульский, Пруткин, 1981а, 1981б). Кратко эти результаты хорошо сформулированы в статье В.Н. Страхова (1991), подготовленной при участии сотрудников лаборатории:

**Первое** – глубокая разработка аналитической теории плоской задачи гравиметрии и магнитометрии на основе аппарата теории функций комплексного переменного.

**Второе** – введение понятия теоретической обратной задачи и разработка концепции двухэтапных технологий интерпретации аномальных гравитационных и магнитных полей.

Вопросам аналитической теории плоской задачи гравиметрии и магнитометрии и использования аппарата теории функций комплексного переменного посвящена большая часть трудов А.В. Цирульского (Цирульский, 1962, 1963, 1964, 1968, 1972, 1974а, 1974б, 1990; Цирульский, Никонова, 1975; Никонова, Цирульский, 1975, 1978; Федорова, Цирульский, 1976, 1978). Он занимался этими вопросами всю жизнь. А.В. Цирульский получил новое представление комплексной напряженности конечной однородной области в виде контурного интеграла типа Коши и ввел (впервые в теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий) уравнения кривых в комплексной форме. Это сразу же привело к громадному прогрессу, по крайней мере, в двух вопросах:

а) аналитического (в замкнутой форме) решения прямых задач гравиметрии и магнитометрии;

б) изучение связей между особыми точками аналитических функций, фигурирующих в уравнении аналитических кривых в комплексной форме, и особыми точками аналитического продолжения комплексных характеристик внешнего поля через указанные кривые внутрь масс. Выяснение последней связи и использование классических результатов, относящихся к теории интегралов типа Коши, имело для теории интерпретации двумерных полей фундаментальное значение и позволило получить ряд важных теорем единственности.

Указанные классические результаты А.В. Цирульского послужили основой для работ других авторов (Голиздра Г.Я., Страхов В.Н., Чередниченко В.Г., Девицин В.М. и др.), в которых они обобщались на случай переменных плотностей, переменной намагниченности и т.д.

Второй крупный вклад А.В. Цирульского в теорию плоской задачи гравиметрии и магнитометрии состоит в расширении классов комплексных характеристик внешних гравитационных и магнитных полей, для которых обратная задача разрешима в конечном виде, введении в теорию интерпретации понятия семейства эквивалентных областей, непрерывного относительно плотности. Сильное впечатление на геофизическую аудиторию производили доклады Александра Вениаминовича, в которых демонстрировались семейства эквивалентных решений. Под его руководством Фаиной Иосифовной Никоновой были получены существенные теоретические результаты по исследованию двумерной обратной задачи теории потенциала (в классе ограниченных объектов) (Цирульский, Никонова, 1975; Никонова, Цирульский, 1975, 1978), а Натальей Васильевной Федоровой – по двумерной структурной обратной задаче (Федорова, Цирульский, 1976, 1978); все алгоритмы интерпретации были программно реализованы. Этим авторским коллективом были построены теоретические и практические примеры интерпретации профильных данных. На основе перечисленных выше результатов была разработана система интерпретации гравитационных и магнитных аномалий СИГМА, позволяющая оперативно строить и анализировать альтернативные

варианты плотностных и магнитных разрезов. Система была успешно использована для изучения строения земной коры по ряду широтных пересечений Урала и сопредельных платформ, внедрена в научных и производственных организациях. А.В. Цирульским совместно с Ильей Леонидовичем Пруткиным выведены новые (более простые) уравнения трехмерных обратных задач грави-магниторазведки (Цирульский, Пруткин, 1981а, 1981б).

Под его руководством защитили кандидатские диссертации Н.В. Федорова, П.С. Мартышко, И.Л. Пруткин, Ф.И. Никонова; их исследования широко известны в нашей стране и за рубежом и пользуются высокой репутацией. Александр Вениаминович терпеливо и настойчиво помогал начинающим ученым, пропагандировал не только свои идеи, но и подходы других ученых. Как отмечал В.Н. Страхов (1991): «Он оказал огромное влияние на развитие теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий в СССР. Это влияние ощущали практически все, кто работал в указанной области между 1965 и 1990 гг., и оно гораздо значительнее, чем следует из изучения специальной литературы». А.В. Цирульский скоропостижно скончался 1 декабря 1990. До октября 1992 г. обязанности заведующего исполняла к.ф.-м.н. Ф.И. Никонова, о научных результатах которой сказано выше.

С 1992 г. заведует лабораторией чл.-корр. РАН д.ф.-м.н. Петр Сергеевич Мартышко, также выпускник УрГУ (ныне УрФУ) (математико-механического факультета), с 2004 г. по 2015 г. – директор Института.

В 1990-е годы в лаборатории появились первые персональные компьютеры, активно разрабатывались теория и численные методы решения трехмерных прямых и обратных задач, для которых аппарат ТФКП неприменим. Потребовались другие подходы.

П.С. Мартышко были получены уравнения теоретических обратных задач (с явно заданным оператором) для геофизических полей, удовлетворяющих уравнениям Лапласа, Гельмгольца, диффузии и телеграфному; на этой основе впервые построены примеры решений трехмерной обратной задачи электро-разведки постоянным и переменным током (Мартышко, 1986, 1990; Мартышко, Рублев, 1999; Martyshko, 1999a, 1999b; Martyshko,

Rublev, 1999;). Результаты легли в основу докторской диссертации, защищенной в октябре 1993 г. Под его руководством Алексей Леонидович Рублев разработал программу и впервые построил примеры решений обратной задачи для уравнения Гельмгольца в трехмерном случае (Мартышко, Рублев, 1999; Martyshko, Rublev, 1999). Дважды с 1998 по 2000 г. и с 2001 по 2003 г. Рублеву А.Л. присуждалась Государственная стипендия для выдающихся молодых ученых. В 2006 году А.Л. Рублев защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидат физ.-мат. наук.

И.Л. Пруткин предложил оригинальный «метод локальных поправок» для решения нелинейных обратных задач гравимагнетрии, при этом задача сводится к простому алгебраическому уравнению, были разработаны алгоритмы и программы для определения геометрии трехмерных ограниченных объектов, границ раздела по измерениям на площади гравитационных или магнитных полей (Пруткин, 1986). П.С. Мартышко и И.Л. Пруткин предложили алгоритмы разделения источников потенциальных полей по глубине для локальных аномалий (Мартышко, Пруткин, 2003). В 1998 году И.Л. Пруткин защитил докторскую диссертацию, в 2004 году по семейным обстоятельствам уехал в Германию, где и работает поныне.

Метод локальных поправок в дальнейшем был значительно модифицирован как для решения трехмерных структурных (нелинейных) обратных задач, так и линейных обратных задач (вычисление плотности, пересчет потенциальных полей (Мартышко и др., 2010, 2017; Martyshko et al., 2018).

Н.В. Федоровой на мировом уровне проводятся исследования: изучение строения земной коры Урала, изучение геомагнитного поля и его динамики, по интерпретации магнитных аномалий (с участием кандидатов наук А.Л. Рублева и В.А. Пьянкова, а также и Д.В. Гемайдинова) (Федорова, Рублев, 2019; Martyshko и др., 2014). Она является ответственным исполнителем проекта РНФ, участвует в выполнении совместных с археологами проектов РНФ и РФФИ. В 2005 г. Н.В. Федорова защитила диссертацию на соискание степени доктора физико-математических наук по специальности «Геофизика».

Большой вклад во все исследования вносит ведущий научный сотрудник Игорь Викторович Ладовский, перешедший в лабораторию в 2009 г. И.В. Ладовский специалист в области геотермии, математической геофизики. Участвовал в разработке методов комплексной интерпретации грави-магнитных и стационарных тепловых полей на основе решения теоретической обратной задачи логарифмического потенциала. Теоретически исследовал проблемы решения стационарных задач теплопроводности в кусочно-однородных средах. Разрабатывает теорию и методы комплексной интерпретации геофизических полей. Предложил новый подход к решению задач теории потенциальных полей для уравнения Пуассона со специальным типом линейного сопряжения в кусочно-однородных средах (Ладовский и др., 2019; Ladovskiy et al., 2020). Участвует в выполнении проектов РНФ (ответственный исполнитель).

С 2006 года лаборатория пополняется выпускниками кафедры Вычислительных методов и уравнений математической геофизики УрФУ (Цидаев А.Г., Гемайдинов Д.В., Бызов Д.Д., Черноскутов А.И.), которой с 2002 г. до перехода на систему департаментов в 2016 г. заведовал член-корр. РАН П.С. Мартышко. Молодые сотрудники, получившие хорошую физико-математическую подготовку, разрабатывают компьютерные технологии, реализующие параллельные алгоритмы, вносят вклад во все направления исследований (Мартышко и др., 2010, 2016, 2017а, 2017б, 2018, 2020; Martyshko et al., 2018; Ладовский и др., 2019; Ladovskiy et al., 2020). Бызов Денис Дмитриевич и Черноскутов Александр Игоревич защитили кандидатские диссертации.

В настоящее время в исследованиях, проводимых лабораторией, участвует также аспирант УрФУ А. Черепанов.

В 2014 г. лаборатория выиграла грант РНФ для действующих лабораторий, в 2020 г. для научных групп (рук. П.С. Мартышко).

Отметим некоторые результаты современных исследований, проводимых в лаборатории (Мартышко и др., 2010, 2014, 2016, 2017а, 2017б, 2018, 2020; Ладовский и др., 2019; Федорова, Рублев, 2019; Akimova et al., 2020; Ladovskiy et al., 2020; Martyshko et al., 2018).

На основе новых сеточных алгоритмов разработан метод интерпретации гравитационных (и магнитных) аномалий (выделение локальных неоднородностей): по выделенным аномалиям от источников, разделённым по горизонтальным слоям, строится трехмерное распределение плотности (намагниченности) в изучаемом объёме среды в формате сеточных функций. Процесс построения плотностных моделей сводится к решению прямых и обратных задач гравиметрии. Разработаны оригинальные высокоэффективные алгоритмы «быстрого» решения прямой задачи гравиметрии на сетках больших размерностей, которые применены для успешной реализации функциональных и итерационных схем решения обратных задач. Поиск решений осуществляется на практически содержательных множествах корректности при разумном выборе плотностных моделей начального приближения. Предложено простое решение для пространственного продолжения масс за боковые грани плотностной модели и выбора закона распределения фоновой плотности (относимости) для расчёта аномалий гравитационного поля.

Разработаны итерационные алгоритмы с адаптивной регуляризацией для устойчивого решения линейной и нелинейной (структурной) трёхмерной обратной задачи гравиметрии и предложена оригинальная методика послойной коррекции плотности в неоднородном параллелепипеде. Методика была реализована в компьютерной системе интерпретации гравитационных данных, применительно к реальным задачам сейсмоплотностного моделирования. Все этапы интерпретации и обработки данных интегрированы в один программный продукт. Процесс начинается с построения трехмерной плотностной модели начального приближения по сейсмическим разрезам и заканчивается корректировкой плотности по авторской методике решения задачи гравитационного моделирования. Дополнительное граничное условие изостатической уравновешенности на глубине дает возможность при моделировании наметить контуры мантийных блоков компенсирующих масс и оптимизировать в них искомое распределение плотности. Контуры мантийных блоков определялись по остаточным (мантийным) аномалиям гравитационного поля и уточнялись по характеру из-

менения аномалий литостатического давления на глубинном гипсометрическом уровне 80 км. Все параллельные алгоритмы программно реализованы как на суперкомпьютере, так и на персональных компьютерах с использованием графических ускорителей. Для построения сейсмоплотностной модели (рис. 1) приполярной части Урала и сопредельных регионов (совместно с лабораторией сейсмометрии) использованы результаты интерпретации данных по сейсмическим профилям ГСЗ и фрагментам протяженных геотраверсов (одиннадцать профилей, расположенных в пределах изучаемой трапеции с географическими координатами 60–68° с.ш., 48–72° в.д.): градиентные скоростные разрезы в формате сеточных функций, построенные по полям времен. Обосновано преимущество использования сеточных скоростных разрезов для решения обратных задач гравитационного моделирования.

В результате интерпретации магнитных данных показано, что выделенные региональные магнитные аномалии нельзя объяснить изменениями рельефа кровли и подошвы кристаллической коры. Результаты моделирования распределения скорости сейсмических волн и намагниченности в литосфере вдоль профилей ГСЗ в пределах региона позволили разделить земную кору по магнитным свойствам на два слоя: верхний – с низкой намагниченностью (менее 0,3 А/м) и нижний – с высокой средней намагниченностью (2–4 А/м). Средняя глубина до границы раздела слоев составляет 20 км. Рельеф границы хорошо совпадает на сейсмических разрезах с положениями скоростного уровня 6,5 км/с (граница «базальтового слоя»). На Урале и в Западной Сибири в верхнем слое кристаллической коры выделено большое количество намагниченных блоков различных размеров. На восточной границе Уральского орогена и Западно-Сибирской плиты отчетливо прослеживается падение намагниченных источников на восток. По-видимому, они связаны с глубинным разломом и имеют корни в виде крупного блока в средней коре.

С применением обобщенной формулы Грина разработан аналитический метод «сквозного интегрального преобразования» типа свертки для уравнений с разрывными коэффициентами. Сопоставлены схемы вычислений гравитационных, магнитных и температурных

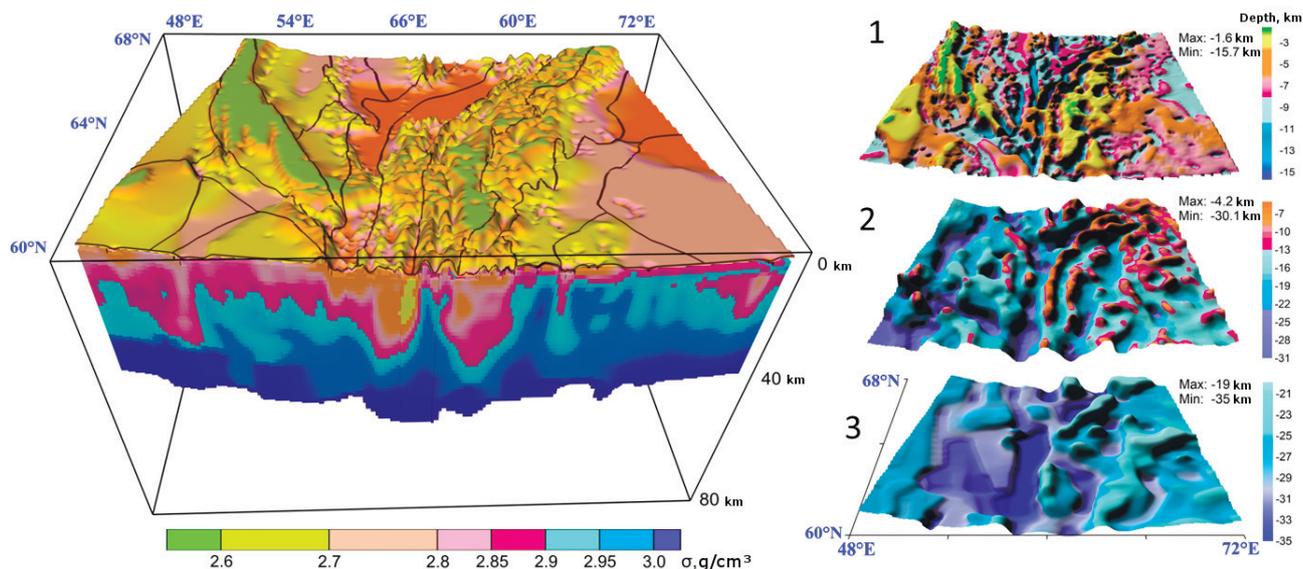


Рис. 1. Трехмерная сейсмоплотностная модель земной коры. Модель разделена кровлей фундамента и кровлей верхней мантии (слева); рельеф кровли верхней (1) средней (2) и нижней (3) земной коры

аномалий в неоднородной среде. Разработан двухэтапный метод приближенного решения прямой структурной задачи стационарной теплопроводности. Для слабоконтрастных по теплопроводности слоистых сред получена аналитическая формула, реализующая аддитивный алгоритм количественных вычислений для задачи линейного сопряжения в классе криволинейных границ раздела. Получена сеточная аппроксимация интегрального оператора прямой задачи с разбиением целевой области на элементарные параллелепипеды с постоянными параметрами теплопроводности и теплогенерации. Выполнено разделение тепловых потоков на коровую и мантийную составляющие. Дана оценка глубинных температур по кровле верхней мантии (Ладовский и др., 2019; Ladovskiy et al., 2020).

Представленные выше результаты направлены на совершенствование технологии построения геолого-геофизических моделей земной коры и верхней мантии, что и подчеркивает их актуальность при постановке практически важных задачах изучения глубинного строения нефте- и газоперспективных регионов. В результате исследования были созданы схемы количественной интерпретации разномасштабных региональных и локальных аномалий, применительно как для задачи изучения глубинного строения земной коры и верхней мантии, так и задач малоуглубинной геофизики и задач структурно-формационного анализа.

С 2016 г. в рамках проектов РФФИ проводятся исследования по интерпретации гравитационных данных с учетом формы планеты (Мартышко и др., 2018, 2020).

Предложено непрерывное обратимое преобразование «плоской» трехмерной плотностной модели в «сферическую» и наоборот, основанное на преобразовании Гаусса-Крюгера. Свойство сохранения углов пересекающихся линий на эллипсоидальных поверхностях сечения модели при преобразовании позволяет сохранять геометрические формы особенностей плотностного распределения. Принцип сохранения превышения точек модели над поверхностью Земли позволяет сохранить соответствие положения данных точек в географических координатах.

Разработан и программно реализован вычислительно эффективный метод решения прямой задачи гравиметрии для эллипсоидальной модели с кусочно-постоянным распределением плотности, заданным на иррегулярной сетке (в геодезической системе координат). По результатам проведенных численных экспериментов, метод обеспечивает погрешность в поле менее 0,01% при ~100-кратном ускорении вычислений по сравнению с методом Гаусса-Лежандра для моделей с количеством элементов порядка 108 и точек счета поля порядка 106.

Проведен ряд численных экспериментов, который позволил произвести сравнение вы-

численных полей «плоских» и «сферических» моделей различной протяженности. Установлено, что для моделей протяженностью порядка 1000x1000 км и мощностью порядка 100 км может потребоваться учет «сферичности» при решении прямых и обратных задач гравиметрии, так как погрешность «за сферичность» может превысить 5%. При решении линейных обратных задач гравиметрии для «сферических» моделей в качестве начального приближения можно брать результат, полученный в ходе решения задачи в «плоской» постановке.

Разработано пользовательское программное обеспечение для решения прямой задачи гравиметрии для эллипсоидальных моделей со встроенным преобразованием (из «плоской» модели в «сферическую»). Приложение использует современные технологии параллельных вычислений (Nvidia CUDA) и рассчитано для использования на гетерогенных распределенных вычислительных системах (суперкомпьютерах), что позволяет производить вычисления для региональных моделей высокого разрешения. Исходные коды, исполняемые файлы и инструкции разработанного ПО доступны по свободной лицензии в сети Интернет.

Предложенный алгоритм и разработанное программное обеспечение применены для решения обратной задачи гравиметрии методом сопряженных градиентов. Введенная модификация целевого функционала позволяет с высокой точностью находить решение обратной задачи с использованием дополнительных априорных данных: модели начального приближения и распределения среднего значения плотности по глубине. Метод имеет малое количество настроечных параметров, основным из которых является вектор коэффициентов штрафной функции, позволяющий нейтрализовать эффект «скопления» плотностных аномалий в верхних слоях модели. Для реализации метод требует только независимо имплементированный оператор прямой задачи и его «транспонированную версию» (которые совпадают при определенных постановках). Вычислительная эффективность непосредственно зависит только от качества реализации оператора прямой задачи, т. к. его вычислительная сложность на несколько порядков выше сложности операций, используемых в методе.

Для «плоской» региональной плотностной модели, построенной в Институте геофизики ИГФ УрО РАН в результате решения линейной обратной задачи гравиметрии по наблюдаемому полю, было найдено уточненное решение с поправкой за сферичность. Ошибка в поле для «сферической» модели сокращена с 9% до 3%.

Разработанный Д.Д. Бызовым метод «многогранников» можно применять при решении прямых и обратных задач гравиметрии для плотностных моделей, ограниченных не только элементом поверхности эллипсоида, но и произвольной поверхностью (которая должна хорошо поддаваться триангуляции). При решении практических задач естественно рассматривать рельеф в качестве этой поверхности. Такой подход позволит точно вычислять топографическую поправку с учетом сферичности и без использования техник аппроксимации (таких как приближение гравитационного эффекта масс, заключенных между референцповерхностью и поверхностью рельефа поправкой за промежуточный плоскопараллельный слой). Также, становится возможным проведение интерпретации наблюдаемых гравитационных данных с учетом «сферичности» без предварительного вычисления поправок за рельеф, используя для построения плотностных моделей измеренные на рельефе значения поля.

Результаты исследований сотрудников лаборатории отмечались в числе достижений Академии наук СССР и РАН, нашли практическое применение в производственных организациях, включены в монографии и учебные пособия. Во времена СССР ежегодно проводился Всесоюзный семинар им. Д.Г. Успенского «Вопросы теории и практики интерпретации геофизических полей», которым руководил академик В.Н. Страхов; раз в два года проводились школы-семинары. На этих форумах проводилась апробация результатов перед высококвалифицированной аудиторией (академик В.Н. Страхов, д.ф.-м.н. А.В. Цирульский, академик НАН Украины В.И. Старостенко, д.г.-м.н. В.М. Новоселицкий, д.ф.-м.н. Е.Г. Булах, д.ф.-м.н. М.А. Алексидзе и др.), проходило неформальное общение участников разных поколений в теплой товарищеской атмосфере, которые на

всю жизнь становились друзьями. Практически все результаты сотрудников лаборатории докладывались на этом семинаре (сейчас он имеет статус Международного семинара им. Успенского-Страхова), а также на конференциях по прикладной математике и математической физике.

Результаты исследований также докладывались на Генеральных ассамблеях Международного Союза геофизики и геодезии (IUGG1999, 2007, 2011, 2015), Международной ассоциации геомагнетизма и аэрономии (IAGA2009, 2013), Международной ассоциации «Математические геонауки» (IAMG2015), Конференциях по математической геофизике (CMG2012, 2018), Американского геофизического союза (AGU fall session2010), Европейской ассоциации геоученых (EAGE1997, 1999, 2001, 2004, 2010), SGEM (2014, 2015, 2016, 2017, 2018); Int. Conference Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM, 2014-2020); AOGS (2011, 2019), Geoinformatics (2011-2020), Workshop EMI (1996, 1998, 2000, 2006), International Symposium 3D Electromagnetics (1995, 1999, 2007). С 1993 г. по 2007 г. сотрудниками лаборатории (как работающими в лаборатории и ныне, так и перешедшими «для усиления» в другие подразделения) защищено 7 докторских диссертаций. Помимо упомянутых выше следует отметить, что Виктор Тихонович Беликов защитил докторскую диссертацию, будучи сотрудником лаборатории.

Безусловно, достижению перечисленных выше результатов сотрудников лаборатории способствовало тесное сотрудничество с коллегами как внутри Института, так и за его пределами. Гранты РНФ лаборатория выполняет при участии сотрудников лабораторий сейсмометрии и региональной геофизики, ряд исследований по программам УрО РАН выполнялся с сотрудниками Института математики и механики УрО РАН (член-корр. РАН В.В. Васин, д.ф.-м.н. Е.Н. Акимова), по проектам РНФ с Институтом истории и археологии, РФФИ – с Институтом минералогии УрО РАН. Хорошие связи с УрФУ: сотрудники лаборатории проводят занятия и руководят магистрантами и аспирантами. В 1990-е годы научно-организационную поддержку оказал академик директор ИФЗ РАН В.Н. Страхов.

Активно проводится взаимодействие с Бюро ОНЗ РАН (академик-секретарь, академик РАН Александр Олегович Глико, заместители академика РАН Михаил Иванович Эпов и Алексей Джерменович Гвишиани), членом которого с 2008 г. по 2018 г. был П.С. Мартышко. Сотрудники лаборатории являются экспертами научных фондов, экспертами РАН, П.С. Мартышко с 2004 г. по 2014 г. был членом экспертного совета ВАК. Сообщество семинара им. Успенского оказало активную поддержку при неблагоприятном внешнем воздействии на лабораторию. Выражаю благодарность всем коллегам за соавторство, сотворчество и дружескую поддержку.

### *Литература*

*Воскобойников Г.М.* К вопросу о практической применимости метода Б.А. Андреева для определения глубины залегания источников потенциальных полей // Известия АН СССР. Серия геофизическая. 1954. № 1. С. 97–99.

*Воскобойников Г.М.* К вопросу об определении намагниченности возмущающих тел по данным магниторазведки // Известия АН СССР. Серия геофизическая. 1955. № 5. С. 483–485.

*Воскобойников Г.М.* Функция Карлемана и ее применение к решению некоторых задач геофизики // Известия АН СССР. Серия геофизическая. 1962. № 11. С. 1579–1590.

*Воскобойников Г.М., Начапкин Н.И.* Метод особых точек для интерпретации потенциальных полей // Известия АН СССР. Физика Земли. 1969. № 5. С. 24–39.

*Воскобойников Г.М., Начапкин Н.И.* Методические рекомендации по применению метода особых точек для интерпретации потенциальных полей. Свердловск: УНЦ АН СССР. 1980. 130 с.

*Воскобойников Г.М., Шестаков А.Ф.* Метод гасящих функций и его применение для определения особых точек геофизических полей, удовлетворяющих трехмерным уравнениям Лапласа и Гельмгольца // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1982. № 3. С. 62–75.

*Воскобойников Г.М., Шестаков А.Ф.* О методе особых точек применительно к интерпретации сейсмических данных // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1984. № 3. С. 35–40.

Ладовский И.В., Мартышко П.С., Бызов Д.Д., Цидаев А.Г. Задача сопряжения стационарных тепловых полей // Доклады Академии наук. 2019. Т. 488. № 1. С. 81–85.

Мартышко П.С. Интегродифференциальные уравнения обратных задач для переменных электромагнитных полей // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1990. № 5. С. 55–62.

Мартышко П.С. О решении обратной задачи электроразведки на постоянном токе для произвольных классов потенциалов // Известия АН СССР. Физика Земли. 1986. № 1. С. 87.

Мартышко П.С., Бызов Д.Д., Чернокутов А.И. Об интерпретации гравитационных данных, измеренных на рельефе // Доклады Российской академии наук. Науки о Земле. 2020. Т. 495. № 2. С. 5155.

Мартышко П.С., Бызов Д.Д., Чернокутов А.И. Об учёте влияния сферичности земли при трёхмерном плотностном моделировании // Доклады Академии наук. 2017. Т. 477. № 2. С. 221–225. DOI: 10.7868/S0869565217320184

Мартышко П.С., Ладовский И.В., Бызов Д.Д., Колмогорова В.В. О выборе избыточной плотности при гравитационном моделировании неоднородных сред // Физика Земли. 2017. № 1. С. 138–147.

Мартышко П.С., Ладовский И.В., Бызов Д.Д., Чернокутов А.И. О решении прямой задачи гравиметрии в криволинейных и декартовых координатах: эллипсоид Красовского и “плоская” модель // Физика Земли. 2018. № 4. С. 31–39.

Мартышко П.С., Ладовский И.В., Федорова Н.В., Бызов Д.Д., Цидаев А.Г. Теория и методы комплексной интерпретации геофизических данных. Екатеринбург: УрО РАН. 2016. 94 с.

Мартышко П.С., Ладовский И.В., Цидаев А.Г. Построение региональных геофизических моделей на основе комплексной интерпретации гравитационных и сейсмических данных // Физика Земли. 2010. № 11. С. 23–35.

Мартышко П.С., Пруткин И.Л. Технология разделения источников гравитационного поля по глубине // Геофизический журнал. 2003. Т. 25. № 3. С. 159–168.

Мартышко П.С., Рублев А.Л. О решении трехмерной обратной задачи для уравнения Гельмгольца // Российский геофизический журнал. 1999. № 13–14. С. 98.

Мартышко П.С., Федорова Н.В., Акимова Е.Н., Гемайдинов Д.В. Изучение структурных особенностей гравитационного и магнитного полей литосферы с использованием параллельных алгоритмов // Физика Земли. 2014. № 4. С. 50–55. DOI: 10.7868/S0002333714040097

Мартышко П.С., Шестаков А.Ф. Георгий Митрофанович Воскобойников – основатель уральской школы математической геофизики // Уральский геофизический вестник. 2013. № 1 (21). С. 5–9.

Никонова Ф.И., Цирульский А.В. К вопросу о граничных особых точках логарифмического потенциала // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1975. № 6.

Никонова Ф.И., Цирульский А.В. Об использовании классов потенциалов, для которых обратная задача разрешима в конечном виде при интерпретации гравимагнитных аномалий // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1978. № 2.

Пруткин И.Л. О решении трехмерной обратной задачи гравиметрии в классе контактных поверхностей методом локальных поправок // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1986. № 1. С. 67–77.

Страхов В.Н. Памяти друга // Известия АН СССР. Физика Земли. 1991. № 4.

Федорова Н.В., Рублев А.Л. Численное моделирование источников магнитных аномалий в земной коре Южного Урала // Геология и геофизика. 2019. Т. 60, № 11. С. 16391649. DOI: 10.15372/GiG2019106

Федорова Н.В., Цирульский А.В. К вопросу о разрешимости обратной задачи логарифмического потенциала для контактной поверхности в конечном виде // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1976. № 10.

Федорова Н.В., Цирульский А.В. К вопросу об обратной задаче для контактной поверхности // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1978. № 3.

Хачай О.А. К вопросу о решении обратной задачи магнитотеллурического зондирования для комплексного импеданса // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1978. № 12. С. 45–51.

Хачай О.А. Унифицированный метод решения обратной задачи электромагнитных зондирования для одномерной среды // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1980. № 5. С. 51–60.

Цирульский А.В. К вопросу о единственности решения обратной задачи теории потенциала // Тр. Ин-та геофизики УФАИ СССР. 1962. Вып. 2.

Цирульский А.В. К вопросу о решении прямой и обратной задачи гравиразведки // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1974. № 7.

Цирульский А.В. К теории метода искусственного подмагничивания в двумерном случае // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1974. № 9.

Цирульский А.В. О Единственности решения обратной задачи теории потенциала // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1972. № 9.

Цирульский А.В. О некоторых свойствах комплексного логарифмического потенциала // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1963. № 7.

Цирульский А.В. О приведении наблюдаемых значений потенциальных полей к одному уровню // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1968. № 3.

Цирульский А.В. О связи задачи об аналитическом продолжении логарифмического потенциала с проблемой определения границ возмущающей области // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1964. № 11.

Цирульский А.В. Функции комплексного переменного в теории и методах потенциальных геофизических полей // Изд-во УрО РАН. Екатеринбург. 1990. 132 с.

Цирульский А.В., Никонова Ф.И. К вопросу о разрешимости обратной задачи логарифмического потенциала в конечном виде // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1975. № 5.

Цирульский А.В., Пруткин И.Л. О решении обратной задачи гравиметрии для произвольных двумерных и трехмерных потенциалов. I // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1981. № 11.

Цирульский А.В., Пруткин И.Л. О решении обратной задачи гравиметрии для произвольных двумерных и трехмерных потенциалов. II // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1981. № 11.

Akimova Elena N., Martyshko Petr S., Misilov Vladimir E., Miftakhov Valeriy O. Cost-efficient numerical algorithm for solving the linear inverse problem of finding a variable magnetization // Mathematical methods in applied sciences. 2020. Т. 43. № 13. P. 7647–7656. <https://doi.org/10.1002/mma.6024>

Ladovskiy Igor; Martyshko Petr; Tsidaev Alexander; Byzov Denis. Method for quantitative interpretation of stationary thermal fields for layered // Geosciences. 2020. 10(5). 199. <https://doi.org/10.3390/geosciences10050199>

Martyshko P.S. Inverse Problems of Electromagnetic Geophysical Fields. Inverse and Ill-Posed Problems Series. VSP: Utrecht. The Netherlands. 1999. 121 p.

Martyshko P.S. Theoretical Inverse Problems for 3-D Electromagnetic Fields. Three-Dimensional Electromagnetics (Editors: M. Oristaglio, B. Spiese). 1999. Geophysical Developments Series. Vol. 7. SEG: Tulsa. P. 287–295.

Martyshko P.S., Rublev A.L. Algorithm and Numerical Examples of 3-D Electromagnetic Inverse Problem. The Second International Symposium on Three-Dimensional Electromagnetics (3DEM-2). October 26–29. 1999.

Martyshko Petr S., Ladovskii Igor V., Byzov Denis D. and Tsidaev Alexander G. Gravity Data Inversion with Method of Local Corrections for Finite Elements Models // Geosciences. 2018. 8(10). 373; <https://doi.org/10.3390/geosciences8100373>.

## ON THE INTERPRETATION OF GEOPHYSICAL FIELDS: FROM THE DETERMINATION OF THE PARAMETERS OF SINGULAR POINTS TO THE CONSTRUCTION OF THREE-DIMENSIONAL GEOPHYSICAL MODELS

**Martyshko P.S.** – Institute of Geophysics UB of RAS, Yekaterinburg

**Abstract.** This April marks the 60th anniversary of the establishment of the Laboratory of Mathematical Geophysics at the Institute of Geophysics of the UFAN (now the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences). This article summarizes the history of the development of the laboratory and presents the main results obtained by its researchers.

**References**

- Akimova Elena N., Martyshko Petr S., Misilov Vladimir E., Miftakhov Valeriy O.* Cost-efficient numerical algorithm for solving the linear inverse problem of finding a variable magnetization // *Mathematical methods in applied sciences*. 2020. T. 43. № 13. P. 7647–7656. <https://doi.org/10.1002/mma.6024>
- Fedorova N.V., Rublev A.L.* Numerical Modeling of the Sources of Magnetic Anomalies in the South Urals Earth's Crust // *Russian Geology and Geophysics*. 2019. Vol. 60. No. 11. P. 1310–1318. doi: 10.15372/RGG2019106
- Fedorova N.V., Tsurul'skij A.V.* K voprosu o razreshimosti obratnoj zadachi logarifmicheskogo potenciala dlja kontaktnoj poverhnosti v konechnom vide // *Izv. AN SSSR. Fizika Zemli*. 1976. № 10.
- Fedorova N.V., Tsurul'skij A.V.* K voprosu ob obratnoj zadache dlja kontaktnoj poverhnosti // *Izv. AN SSSR. Fizika Zemli*. 1978. № 3.
- Hachaj O.A.* K voprosu o reshenii obratnoj zadachi magnitotelluricheskogo zondirovanija dlja kompleksnogo impedansa // *Izv. AN SSSR. Fizika Zemli*. 1978. № 12. S. 45–51.
- Hachaj O.A.* Unificirovannyj metod reshenija obratnoj zadachi jelektromagnitnyh zondirovanij dlja odnomernoj sredy // *Izv. AN SSSR. Fizika Zemli*. 1980. № 5. S. 51–60.
- Ladovskiy I.V., Martyshko P.S., Byzov D.D. and Tsidaev A.G.* Conjugacy Problem for Stationary Heat Fields // *Doklady Earth Sciences*. 2019. Vol. 488. Part 1. P. 1072–1075.
- Ladovskiy Igor; Martyshko Petr; Tsidaev Alexander; Byzov Denis.* Method for quantitative interpretation of stationary thermal fields for layered // *Geosciences*. 2020. 10(5). 199. <https://doi.org/10.3390/geosciences10050199>
- Martyshko P.S.* Integrodifferential Equations of Inverse Problems for Variable Electromagnetic Fields. *Izvestiya, Earth Physics*. Vol. 26. No. 5. 1990.
- Martyshko P.S.* Inverse Problems of Electromagnetic Geophysical Fields. Inverse and Ill-Posed Problems Series. VSP: Utrecht. The Netherlands. 1999. 121 p.
- Martyshko P.S.* Solution of the Inverse Problem of Direct-Current Electric Exploration for Arbitrary Classes of Potentials. *Izvestiya, Earth Physics*. Vol. 22. No. 1. 1986.
- Martyshko P.S.* Theoretical Inverse Problems for 3-D Electromagnetic Fields. Three-Dimensional Electromagnetics (Editors: M. Oristaglio, B. Spiese). 1999. Geophysical Developments Series. Vol. 7. SEG: Tulsa. P. 287–295.
- Martyshko P.S., Byzov D.D. and Chernoskutov A.I.* Accounting for the influence of the Earth's sphericity in three-dimensional density modelling // *Doklady Earth Sciences*. 2017. T. 477. № 1. P. 1325-1329.
- Martyshko P.S., Byzov D.D. and Chernoskutov A.I.* Interpretation of Gravity Data Measured by Topography // *Doklady Earth Sciences*. 2020. Vol. 495. Part 2. P. 914–917. DOI: 10.1134/S1028334X20120077
- Martyshko P.S., Fedorova N.V., Akimova E.N. and Gemaidinov D.V.* Studying the Structural Features of the Lithospheric Magnetic and Gravity Fields with the Use of Parallel Algorithms // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. 2014. Vol. 50. № 4. P. 508–513. DOI: 10.1134/S1069351314040090
- Martyshko P.S., Ladovskij I.V., Byzov D.D., and Chernoskutov A.I.* On Solving the Forward Problem of Gravimetry in Curvilinear and Cartesian Coordinates: Krasovskii's Ellipsoid and Plane Modeling // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. 2018. Vol. 54. № 4. P. 565–573. DOI: 10.1134/S1069351318040079 IF: 0.642 <https://rd.springer.com/article/10.1134/S1069351318040079>
- Martyshko P.S., Ladovskij I.V., Fedorova N.V., Byzov D.D., Tsidaev A.G.* Teorija i metody kompleksnoj interpretacii geofizicheskikh dannyh. Ekaterinburg: UrO RAN. 2016. 94 s.
- Martyshko P.S., Ladovsky I.V., Byzov D.D., Kolmogorova V.V.* On Selecting the Excess Density in Gravity Modeling of Inhomogeneous Media // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. 2017. Vol. 53. No. 1. P. 130–139. DOI: 10.1134/S1069351316060057
- Martyshko P.S., Rublev A.L.* Algorithm and Numerical Examples of 3-D Electromagnetic Inverse Problem. The Second International Symposium on Three-Dimensional Electromagnetics (3DEM-2). October 26–29. 1999.
- Martyshko P.S., Rublev A.L.* O reshenii trehmernoj obratnoj zadachi dlja uravnenija Gel'mgol'ca // *Rossijskij geofizicheskij zhurnal*. 1999. № 13–14. S. 98.
- Martyshko P.S., Shestakov A.F.* Georgij Mitrofanovich Voskobojnikov – osnovatel' ural'skoj

- shkoly matematicheskoy geofiziki // Ural'skij geofizicheskij vestnik. 2013. № 1 (21). S. 5–9.
- Martyshko, P.S. and Prutkin, I.L.*, Technology for separating the gravity sources by the depth // *Geofiz. Zh.* 2003. Vol. 25. № 3. PP. 159–168.
- Martyshko, P.S., Ladovskii, I.V., and Tsidaev, A.G.*, Construction of regional geophysical models based on the joint interpretation of gravity and seismic data // *Izv., Phys. Solid Earth.* 2010. V 46. № 11. PP. 931–942.
- Nikonova F.I., Tsirul'skij A.V.* K voprosu o granichnyh osobyh tochkah logarifmicheskogo potenciala // *Izv. AN SSSR. Fizika Zemli.* 1975. № 6.
- Nikonova F.I., Tsirul'skij A.V.* Ob ispol'zovanii klassov potencialov, dlja kotoryh obratnaja zadacha razreshima v konechnom vide pri interpretacii gravimagnitnyh anomalij // *Izv. AN SSSR. Fizika Zemli.* 1978. № 2.
- Petr S. Martyshko, Igor V. Ladovskii, Denis D. Byzov and Alexander G. Tsidaev.* Gravity Data Inversion with Method of Local Corrections for Finite Elements Models // *Geosciences.* 2018. 8(10). 373; <https://doi.org/10.3390/geosciences8100373>.
- Prutkin I.L.* O reshenii trehmernoj obratnoj zadachi gravimetrii v klasse kontaktnyh poverhnostej metodom lokal'nyh popravok // *Izv. AN SSSR. Ser. Fizika Zemli.* 1986. № 1. S. 67–77.
- Strakhov V.N.* Pamjati druga // *Izvestija AN SSSR. Fizika Zemli.* 1991. №4
- Tsirul'skij A.V.* Funkcii kompleksnogo peremennogo v teorii i metodah potencial'nyh geofizicheskikh polej // *Izd-vo UrO RAN. Ekaterinburg.* 1990. 132 s.
- Tsirul'skij A.V.* K teorii metoda iskusstvennogo podmagnichivaniya v dvumernom sluchae // *Izv. AN SSSR. Fizika Zemli.* 1974. № 9.
- Tsirul'skij A.V.* K voprosu o edinstvennosti reshenija obratnoj zadachi teorii potenciala // *Tr. In-ta geofiziki UFAN SSSR.* 1962. Vyp. 2.
- Tsirul'skij A.V.* K voprosu o reshenii prjamoj i obratnoj zadachi gravirazvedki // *Izv. AN SSSR. Fizika Zemli.* 1974. № 7.
- Tsirul'skij A.V.* O Edinstvennosti reshenija obratnoj zadachi teorii potenciala // *Izv. AN SSSR. Fizika Zemli.* 1972. № 9.
- Tsirul'skij A.V.* O nekotoryh svojstvah kompleksnogo logarifmicheskogo potenciala // *Izv. AN SSSR. Ser. geofiz.* 1963. № 7.
- Tsirul'skij A.V.* O privedenii nabljudennyh znachenij potencial'nyh polej k odnomu urovnju // *Izv. AN SSSR. Fizika Zemli.* 1968. № 3.
- Tsirul'skij A.V.* O svyazi zadachi ob analiticheskom prodolzhenii logarifmicheskogo potenciala s problemoj opredelenija granic vozmushhajushhej oblasti // *Izv. AN SSSR. Ser. geofiz.* 1964. № 11.
- Tsirul'skij A.V., Nikonova F.I.* K voprosu o razreshimosti obratnoj zadachi logarifmicheskogo potenciala v konechnom vide // *Izv. AN SSSR. Fizika Zemli.* 1975. № 5.
- Tsirul'skij A.V., Prutkin I.L.* O reshenii obratnoj zadachi gravimetrii dlja proizvol'nyh dvumernyh i trehmernyh potencialov. I // *Izv. AN SSSR. Fizika Zemli.* 1981. № 11.
- Tsirul'skij A.V., Prutkin I.L.* O reshenii obratnoj zadachi gravimetrii dlja proizvol'nyh dvumernyh i trehmernyh potencialov. II // *Izv. AN SSSR. Fizika Zemli.* 1981. № 11.
- Voskoboynikov G.M.* Funkcija Karlemana i ee primenenie k resheniju nekotoryh zadach geofiziki // *Izvestija AN SSSR. Serija geofizicheskaja.* 1962. № 11. S. 1579–1590.
- Voskoboynikov G.M.* K voprosu o prakticheskoy primenimosti metoda B.A. Andreeva dlja opredelenija glubiny zaleganija istochnikov potencial'nyh polej // *Izvestija AN SSSR. Serija geofizicheskaja.* 1954. № 1. S. 97–99.
- Voskoboynikov G.M.* K voprosu ob opredelenii namagnichennosti vozmushhajushhih tel po dannym magnitorazvedki // *Izvestija AN SSSR. Serija geofizicheskaja.* 1955. № 5. S. 483–485.
- Voskoboynikov G.M., Nachapkin N.I.* Metod osobyh toчек dlja interpretacii potencial'nyh polej // *Izvestija AN SSSR. Fizika Zemli.* 1969. № 5. S. 24–39.
- Voskoboynikov G.M., Nachapkin N.I.* Metodicheskie rekomendacii po primeneniju metoda osobyh toчек dlja interpretacii potencial'nyh polej. Sverdlovsk: UNC AN SSSR. 1980. 130 s.
- Voskoboynikov G.M., Shestakov A.F.* Metod gasjashhih funkcij i ego primenenie dlja opredelenija osobyh toчек geofizicheskikh polej, udovletvorjajushhih trehmernym uravnenijam Laplasy i Gel'mgol'ca // *Izv. AN SSSR. Fizika Zemli.* 1982. № 3. S. 62–75.
- Voskoboynikov G.M., Shestakov A.F.* O metode osobyh toчек primenitel'no k interpretacii sejsmicheskikh dannyh // *Izv. AN SSSR. Fizika Zemli.* 1984. № 3. S. 35–40.