УДК 550.834.3(571.1)

О ПРОБЛЕМЕ ПОСТРОЕНИЯ СРЕДНЕМАСШТАБНЫХ ПЛОТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ СФЕРОИДАЛЬНОЙ ЗЕМЛИ

Ладовский И.В., Бызов Д.Д. – Институт геофизики УрО РАН, Екатеринбург
Черноскутов А.И. – Институт геофизики УрО РАН, Уральский федеральный университет, Екатеринбург

Аннотация. Предложен способ преобразования трехмерного каркаса плотностной модели из сфероидальной геометрии в прямоугольную и наоборот. Представлены алгоритмы вычисления нормальной компоненты гравитационного поля для трехмерных моделей в различных системах координат. Сопоставлены гравитационные аномалии от тел, рассчитанных в геоцентрической сферической (или географической) системе координат, с подобными же аномалиями от преобразованных масс, но вычисленными в прямоугольной системе декартовых координат. Выполнены оценки погрешности вычисления модельного гравитационного поля за кривизну земной поверхности в пределах одной шестиградусной зоны картографической проекции Гаусса-Крюгера.

Прямая задача гравиметрии на сфероидальной Земле, плотностные модели, прямоугольная призма и сферический параллелепипед, проекция Гаусса-Крюгера.

ON THE PROBLEM OF CONSTRUCTION OF MEDIUM-SCALE DENSITY MODELS FOR THE SPHEROIDAL EARTH

Ladovskiy I.V., Byzov D.D. – Institute of Geophysics UB of RAS, Yekaterinburg
Chernoskutov A.I. – Institute of Geophysics UB of RAS, Ural federal university, Yekaterinburg

Abstract. A method for transforming the three-dimensional framework from spheroidal geometry to rectangular geometry is proposed. Algorithms for calculating the normal component of the gravitational field for three-dimensional models in different coordinate systems are presented. Correlations of gravitational anomalies from bodies calculated in a geocentric spherical (or geographic) coordinate system, with similar anomalies from the transformed masses, but calculated in a rectangular system of Cartesian coordinates. Estimates of the error in calculating the model gravitational field for the curvature of the earth's surface within a six-degree region of the Gauss-Krueger cartographic projection are estimated.

Direct gravity problem for spheroidal Earth, density models, a rectangular prism and a spherical parallelepiped, a Gauss-Krueger projection.

Введение

В проблеме развития теории интерпретации геофизических полей важнейшее место принадлежит совершенствованию и развитию методов решения прямых задач – разработке эффективных алгоритмов для вычисления составляющих полей в различных системах координат (Шванк, Люстих, 1947; Голиздра, 1972; Гравиразведка, 1990; Петровский и др., 2007; Пятаков, Исаев 2012; Мартышко и др., 2013; 2015; Бычков и др., 2015). Использование этих методов позволяет надлежащим образом, при оптимальной аппроксимации элементов объема, учесть гравитационное влияние модельных объектов с известными геометрическими и плотностными параметрами. Морфологический анализ и сопоставление вычисленных компонент полей в различных системах координат ограничит число возможных эквивалентов распределения плотности при решении обратной задачи гравиметрии.

Исходными данными для интерпретации (решения трехмерной линейной обратной задачи гравиметрии) являются аномалии силы тяжести в редукции Буге, которые вычисляются на уровне общеземного эллипсоида по непосредственно измеренным на рельефе значениям силы тяжести. В связи с этим, получающиеся модели распределения плотности, поле которых соответствует данным аномалиям, должны иметь в качестве своей верхней границы часть поверхности общеземного эллипсоида. От нее же следует отсчитывать (вдоль

нормали) «глубину» расположения точек внутри модели. На практике построение таких моделей даже на этапе решения прямой задачи сопряжено с серьезными вычислительными трудностями, поскольку гравитационное поле от объектов, ограниченных эллиптическими поверхностями, выражается через эллиптические интегралы. Так как средний радиус Земли достаточно велик (6371 км), для моделей небольших территорий можно считать их внешние границы плоскими. Однако искажение геометрии объемных элементов аппроксимирующей модели может привести к искажению искомого распределения плотности. Погрешность вычисления гравитационного поля Δg на криволинейной поверхности Земли (сфере или эллипсоиде) сравнительно с плоскостью зависит от пространственных размеров области заполнения аномальных масс и способа деформирования трехмерного сфероидального сегмента шарового слоя в эквивалентный образ трехмерного тела в горизонтальном слое.

В приложениях задач математической картографии наблюденное поле, редуцированное на поверхность земного эллипсоида, изображается в проекции на горизонтальную плоскость. Гравиметрические карты отнесены к поверхности референц-эллипсоида Красовского и отображаются на плоскость в конформной проекции Гаусса-Крюгера. Та же проекция необходима и для отображения на плоскость линейных элементов и фрагментов площади на поверхности эллипсоида.

Задача об учете влияния сферичности Земли на результаты интерпретации гравиметрических данных в настоящее время активно исследуется в Пермском горном институте УрО РАН. Авторы статей (Бычков и др., 2015; Долгаль и др., 2015) рассматривают данный вопрос при моделировании геоплотностных неоднородностей по результатам измерения гравитационного поля в пределах сравнительно небольших по размерам площадей (профилей). Для вычисления ускорения силы тяжести от сферического градусного параллелепипеда (тессероида) сопоставляется численная схема Гаусса-Лежандра и адаптивный кубатурный алгоритм, которому, несмотря на меньшую точность, отдается несомненное предпочтение по быстродействию. Приводят модельные примеры, свидетельствующие о заметных различиях аномальных эффектов на «плоской» и «сферической» Земле, обусловленных одними и теми же возмущающими объектами уже на расстояниях в первые сотни километров. В связи с чем, предлагают существенно изменить процедуру редуцирования данных высокоточной гравиметрии с учетом сферичности Земли (Бычков и др., 2015; Хохлова, 2015).

В работах (Старостенко, Манукян, 1983; Старостенко и др., 1986) рассчитывается прямой гравитационный эффект от крупноблочных моделей глубинного залегания: поперечный размер блоков 5°×5°, мощность – 300 км, глубина залегания до верхней кромки погруженного блока 3–100 км; плотность всех блоков принята одинаковой – 1 г/см^3. Несмотря на огромные значения разности полей в абсолютных единицах (мГал), относительная поправка за сферичность в эпицентрах блоков менее 1 % и незначительно варьируется в зависимости от глубины залегания объектов.

Зарубежные авторы также не обходят стороной данную тему, предлагая инновационные технологии физического и компьютерного моделирования. Так, например, ряд авторов (Heck, Seitz, 2007) рассматривают возможность в полноформатных «сферических» моделях заменить составляющие их элементы (тессероиды) на «проективные» прямоугольные призмы либо на эквивалентные точечные массы. Другие (Wild-Pfeiffer et al., 2007) для аппроксимации трехмерных плотностных моделей предлагают использовать равновеликие по объему призмы и тессероиды либо эквивалентные им источники простого слоя, а для вычисления гравитационных интегралов применять кубатуры Гаусса-Лежандра. Для больших составных моделей при счете поля на множестве точек поверхности относимости рекомендуется реализовать параллельные алгоритмы с

использованием технологии «Open MP». В работах, связанных с редуцированием орбитальных геофизических полей (Juraj. et al., 2009; Bouman et al., 2015) освещается вопрос о применимости данных высокоточных спутниковых измерений гравитационного поля для построения региональных моделей, что, разумеется, невозможно без соответствующих топографических поправок на местности и учета кривизны земной поверхности.

Существуют различные мнения по поводу целесообразности учета сферичности Земли при интерпретации материалов гравиметрических наблюдений. Авторы настоящей статьи склоняются к мнению, что для среднемасштабных региональных плотностных моделей (не говоря уже о гравитационных моделях локальных тел в окрестности месторождений) поправку за сферичность поверхности Земли вводить в расчеты не целесообразно. И, в этом вопросе, авторы разделяют аналогичную точку зрения других исследователей. Например: «…когда изучаемые структуры имеют протяженности порядка тысячи километров и более, необходимо учитывать сферичность Земли…» (Пятаков, Исаев, 2012, с. 109). Поправка за сферичность необходима «лишь при построении региональных геоплотностных моделей с площадью более 20 млн км^2» (Сеначин и др., 2015, с. 45).

Имеются еще более категоричные оценки по поводу влияния сферичности Земли на результаты гравитационного моделирования. В сборной монографии, посвященной геофизическим моделям в полосе исследования вдоль геотраверса ГРАНИТ, Г.Я. Голиздра определенно заявляет, что для территорий в рамках нескольких шестиградусных зон картографической проекции Гаусса-Крюгера допустимо использование гравитационной модели плоского слоя. Частично это подтвердилось и результатами по численному моделированию вдоль транссекта Гранит (Рубин-2): «…на геотраверсе ГРАНИТ … (длина порядка 4000 км) до глубин 60–70 км влияние сферичности Земли можно не учитывать…» (Геотраверс … , 2002, с. 150).

Интуитивно понятно, что отображение сферического слоя на плоский горизонтальный параллелепипед должно получаться путем «изгибающего» непрерывного взаимно-однозначного отображения (Старостенко, Манукян, 1983). Причем искажения объема деформируемого слоя будет тем больше, чем больше мощность слоя. В настоящей работе мы опирались на результаты оригинальных исследований по учету поправок за сферичность Земли (Старостенко и др., 1986; Heck, Seitz, 2007; Бычков и др., 2015). Для отображения угловых координат (широта и долгота) на земной поверхности была использована стандартная картографическая проекция Гаусса-Крюгера в пределах шестиградусной угловой зоны (Морозов, 1979). Мощность слоя выбиралась от 10 до 80 км, что соответствует характерным глубинам ранее построенной «плоской» модели земной коры и верхней мантии Уральского региона (Мартышко и др., 2011; 2016).

В настоящей работе рассчитываются гравитационные эффекты от примитивных распределений аномальных масс плоской, сферической и эллипсоидальной геометрии и сопоставляются аномалии от тел, вычисленных в геоцентрической сферической (или географической) системе координат, с подобными аномалиями от преобразованных элементов тел в системе поверхностных прямоугольных декартовых координат проекции Гаусса-Крюгера. Несовпадения вычисленных полей (среднеквадратичная погрешность их разности) в различных системах координат приведены для сравнительно небольших территорий в пределах одной шестиградусной зоны картографической проекции сферического двуугольника Северного полушария. На средних широтах – это первые сотни километров по долготе (и того же порядка по широте). Глубина залегания модельных объектов – первые десятки километров.

Соотношение между геоцентрической глобальной системой координат точки на поверхности сфероида и (относительной) системой прямоугольных координат точки на горизонтальной плоскости определяется

прямым преобразованием координат Гаусса-Крюгера. Расстояния между двумя точками на плоскости вычисляются вдоль прямой линии; на сфероиде – вдоль геодезической линии. В пределах шестиградусной зоны картографической проекции искажения длин на максимальном удалении от осевого меридиана (три долготных градуса) не превышают 0,1 %, а искажения площадей – не более 0,2 %. Вдоль осевого меридиана линейные искажения отсутствуют (Морозов, 1979).

При вычислении объемов аномальных масс и соответствующих им аномалий гравитационного поля авторы работы использовали два основных принципа.

Первый следует непосредственно из формул преобразований координат Гаусса-Крюгера: в пределах шестиградусной зоны расстояния на плоскости и на поверхности сфероида **принимаются одинаковыми (**или отличаются не более допустимой погрешности 0,1 %). **Второй** не является настолько очевидным, но вытекает из топологии преобразований координат и, по крайней мере, соответствует здравому смыслу непредвзятого стороннего наблюдателя: превышения (высоты или глубины) над плоской земной поверхностью $z = 0$ в некоторой точке с координатами x,y **совпадают** с отметками высот (или глубин) относительно поверхности сфероида $R(\varphi,\lambda)$ в соответствующей точке с географическими координатами φ и λ.

Таким образом, для надлежащего учета поправки за криволинейность поверхности Земли при расчетах и сопоставлении гравитационных эффектов от всех элементов плотностной модели в различных системах координат нужно обеспечить **равенство расстояний** на соответствующих поверхностях относимости и **равенство превышений** относительно плоской и сфероидальной поверхности, отсчитываемых по направлению нормалей в одних и тех же взаимно-однозначных проективных точках. Нарушение данных принципов приводит к необоснованному завышению погрешностей при сопоставлении полей для плоской и сфероидальной моделей и тем больше, чем больше размер планшета градусной сетки и чем больше мощность сфероидального сегмента модельной области.

Гравитационный потенциал и системы криволинейных координат

Определим конфигурацию сфероидального элемента D трехмерной плотностной модели до некоторой глубины H. Пусть внешняя граница S сфероидального элемента – часть поверхности референц-эллипсоида (например, эллипсоида вращения Красовского). В модель включены все точки, нижележащие S и расположенные на расстояниях не более, чем H по направлению внутренней нормали к поверхности эллипсоида. В образовавшемся объеме сфероидального параллелепипеда области D: $\tau_D = (S \times H)$ задано распределение плотности $\sigma(\vec{r})$, $(\vec{r} \in D)$. Аналогично определяется объем трехмерного элемента вертикальной призмы для модели «плоской» Земли при условии, что S – часть плоскости.

Геодезические координаты относятся к общеземному эллипсоиду, размеры и форма которого заданы параметрами стандартизованных моделей, например параметрами модели (ПЗ-90.11), принятой на территории Российской Федерации. В задачах картографического проектирования используется референц-эллипсоид Красовского. Положение точки на поверхности эллипсоида вращения однозначно задается геодезической широтой $B \in [-\pi/2; \pi/2]$ и долготой $L \in [-\pi; \pi]$ (за исключением географических полюсов эллипсоида, где долгота не определена).

Расстояние на поверхности Земли измеряется вдоль геодезической линии; по направлениям градусной сетки – по дугам больших кругов вдоль меридианов и по дугам малых кругов вдоль параллелей. На плоской поверхности расстояния меряются по прямой. Отображение поверхности эллипсоида на какую-либо поверхность, с последующим разворачиванием ее на плоскость и преобразование географических координат в прямоугольные координаты соответствующих точек, носит название картографической проекции. Разумеет-

ся, не существует отображения поверхности эллипсоида на плоскость, сохраняющего линейные расстояния в целом, но есть большое количество отображений, для которых это условие выполняется с достаточной точностью в рамках ограниченных областей. Наиболее часто применяемая в России картографическая проекция представляет собой конформное изображение части поверхности земного эллипсоида на часть плоскости с постоянным масштабом на прямолинейном изображении одного из меридианов. Конформное (равноугольное) отображение меридионального двуугольника (долготной зоны) на градусную трапецию в проективной плоскости было предложено Гауссом, а более обстоятельное математическое обоснование с изложением рабочих формул преобразования координат получило в работе Луи Крюгера (Krüger, 1912).

Исходя из требований к созданию российской опорной геодезической сети 1-го класса, относительные искажения длин при проекции поверхности сфероида на плоскость не должно превышать 0,1 %. По этой причине в картографии долготный угол ΔL при вершине меридионального двуугольника ограничивают 6-ю градусами, что обеспечивает необходимую точность проведения топографической съемки в масштабе 1:500 000. Вдоль центрального осевого меридиана линейные искажения отсутствуют. На краях шестиградусной зоны Гаусса-Крюгера, т. е. на максимальном удалении от осевого меридиана (до трех долготных градусов), искажения длин укладываются в требуемый норматив 0,1 %, а искажения площадей не превышает 0,2 %. (Морозов, 1979).

Функции преобразования координат задаются в виде рядов по степеням малого параметра разности долгот граничных меридианов шестиградусной зоны. При прямом преобразовании Гаусса-Крюгера (GK) географические координаты на поверхности эллипсоида посредством (прямых) степенных рядов пересчитываются в прямоугольные координаты на проективной плоскости: $(x,y) = \mathrm{GK}(L,B)$. При обратном преобразовании Гаусса-Крюгера (GK^{-1}) требуется обращение степенных рядов, посредством которых прямоугольные координаты шестиградусной зоны пересчитываются обратно в географические координаты на эллипсоиде: $(L,B) = \mathrm{GK}^{-1}(x,y)$. Прямое и обратное преобразование координат задают взаимно-однозначное соответствие точек проекции Гаусса-Крюгера с эллипсоида на плоскость. Отображение геодезических координат L,B в плоские прямоугольные координаты x,y и обратно с точностью до 0,001 м в линейной мере осуществляется по стандартным формулам, рекомендованными ГОСТ-ом «Глобальная навигационная спутниковая система» (ГОСТ … , 2014).

Для введения поправки за сферичность в расчетное поле гравитационных аномалий от трёхмерных плотностных моделей необходимы формулы решения прямой задачи гравиметрии для типовых аппроксимирующих элементов в сфероидальной и прямоугольной системе координат. Представления о форме сфероидальной планеты «уже могут потребоваться при количественной интерпретации материалов среднемасштабных гравиметрических съемок» (Долгаль и др., 2015, с. 57). Но, если на данном этапе пренебречь полярным сжатием Земли, полагая ее радиус R = 6371 км, то ряд результатов может быть получен в явном аналитическом виде и в сферической системе координат. Последнее обстоятельство использовалось нами для тестирования численных алгоритмов решения задач гравитационного моделирования на «сферической» и «плоской» Земле.

Итак, вместо географических координат B и L на поверхности эллипсоида будем рассматривать геоцентрические координаты φ и λ на поверхности сферы (рис. 1). Полярный угол $\theta \in (0,\pi)$ сферической системы координат заменяет дополняющий его широтный угол $\varphi \in (-\pi/2, +\pi/2)$, отсчитываемый от экваториальной плоскости $\varphi = 0$.

В основу метода гравитационного моделирования заложена интегральная фор-

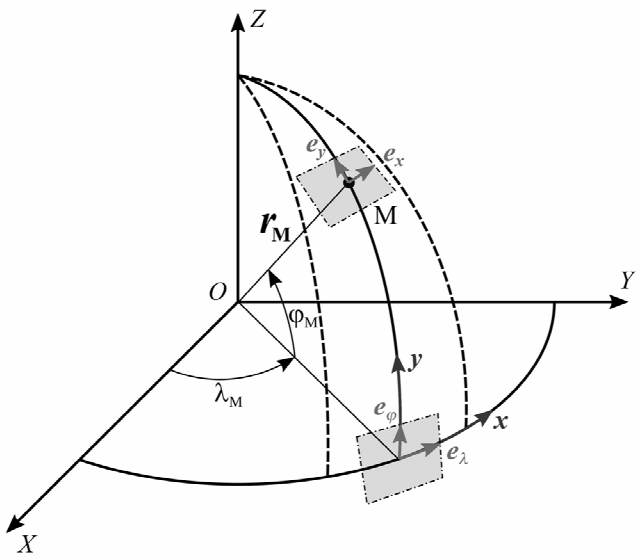


Рис. 1. Геоцентрическая сферическая система координат точки М и соотнесенная с ней поверхностная прямоугольная система координат (тоновая заливка) для сферического двуугольника – шестиградусной зонаы Гаусса-Крюгера с осевым меридианом точки М (зона выделена пунктиром)

мула Ньютона для потенциала: гравитационный эффект области D вычисляется по плотности аномальных масс, распределенных внутри этой области (Шванк, Люстих, 1947).

Пусть D – область распределения аномальных масс; $\sigma(p)$ – их плотность; $p(\vec{r})$, $\vec{r} \in D$ – текущая точка внутри масс (переменная точка интегрирования); $q(\vec{r}_0)$, $\vec{r}_0 \notin D$ – заданная точка вычисления поля на некоторой условной поверхности наблюдений. Тогда гравитационный потенциал области D:

$$V(\vec{q}) = \gamma \int_D \frac{\sigma(p) d\tau_p}{|\vec{p} - \vec{q}|},$$

где γ – гравитационная постоянная; $d\tau_p$ – элемент объема интегрирования; $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – радиус-векторы соответствующих точек.

Напряженность гравитационного поля равна градиенту скалярного потенциала:

$$\vec{g}(\vec{q}) = \nabla_q V = \gamma \int_D \frac{\vec{p} - \vec{q}}{|\vec{p} - \vec{q}|^3} \sigma(p) d\tau_p. \qquad (1)$$

Формула (1) будет инвариантна относительно перехода к любой системе координат, в том числе и в системе поверхностных прямоугольных координат Гаусса-Крюгера. Если $\vec{n}_q$ – внешняя нормаль к некоторой поверхности наблюдения S в ортогональной проекции точки q на S, то нормальная составляющая поля в этой точке вычисляется через скалярное произведение: $g_n = (\vec{n}_q \cdot \nabla_q V)$.

Таким образом, чтобы получить составляющую поля по направлению внешней нормали к поверхности наблюдений S, достаточно в любой системе координат определить расстояние между точками $|\vec{p} - \vec{q}|$, элемент объема интегрирования $d\tau_p$ и нормальную составляющую градиента потенциала ∇V в точке q.

В качестве исходной, базовой системы будем рассматривать геоцентрическую систему декартовых координат $\sum(X,Y,Z)$ и ассоциированные с ней системы цилиндрических $\sum(\rho,\lambda,Z)$ и сферических координат $\sum(r,\varphi,\lambda)$ (см. рис. 1):

1. Если $\vec{p} = (X,Y,Z)$ и $\vec{q} = (X_0,Y_0,Z_0)$, то

$$|\vec{p} - \vec{q}| = \sqrt{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2}. \qquad (2)$$

2. Цилиндрическая система координат $\sum(\rho,\lambda,Z)$ с основанием в экваториальной плоскости $Z = 0$

$$\begin{cases} X = \rho \cos\lambda \\ Y = \rho \sin\lambda \\ Z = Z. \end{cases}$$

Если $\vec{p} = (\rho,\lambda,Z)$ и $\vec{q} = (\rho_0,\lambda_0,Z_0)$, то

$$|\vec{p} - \vec{q}\,| = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\lambda - \lambda_0) + (Z - Z_0)^2}. \qquad (3)$$

3. Геоцентрическая системе сферических координат $\sum(r,\varphi,\lambda)$:

$$\begin{cases} X = r\cos\varphi\cos\lambda \\ Y = r\cos\varphi\sin\lambda \\ Z = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Если $\vec{p} = (r, \varphi, \lambda)$ и $\vec{q} = (r_0, \varphi_0, \lambda_0)$, то

$$|\vec{p} - \vec{q}| = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\omega}, \qquad (4)$$

где $\cos\omega = \sin\varphi\sin\varphi_0 + \cos\varphi\cos\varphi_0\cos(\lambda - \lambda_0)$.

Направление «горизонтальных» осей прямоугольной системы координат (x,y) на поверхности сферы задается единичными ортами $\vec{e}_\lambda, \vec{e}_\varphi$ в точке пересечения дуги осевого меридиана шестиградусной зоны Гаусса-Крюгера и дуги экватора. Эта же точка принимается за начало поверхностной прямоугольной системы координат $\sum(x,y,z)$. Допускается параллельный перенос начала прямоугольных координат вдоль осевого меридиана в точку М. Однако в этой точке на сфере направление осей, заданных ортами $\vec{e}_x, \vec{e}_y$, не будет совпадать с направлением осей в плоскости экватора. Другими будут и отметки высот по направлению координаты «*z*». Прямоугольная система декартовых координат $\sum(x,y,z)$ привязана к поверхности сферы и преобразуется как тройка ортогональных направляющих векторов при перемещении вдоль осевого меридиана (Heck, Seitz, 2007; Bouman et al., 2015). Это означает, что высота (глубина) некоторой отметки относительно точки М на плоскости будет совпадать с превышением относительно точки М на сфере.

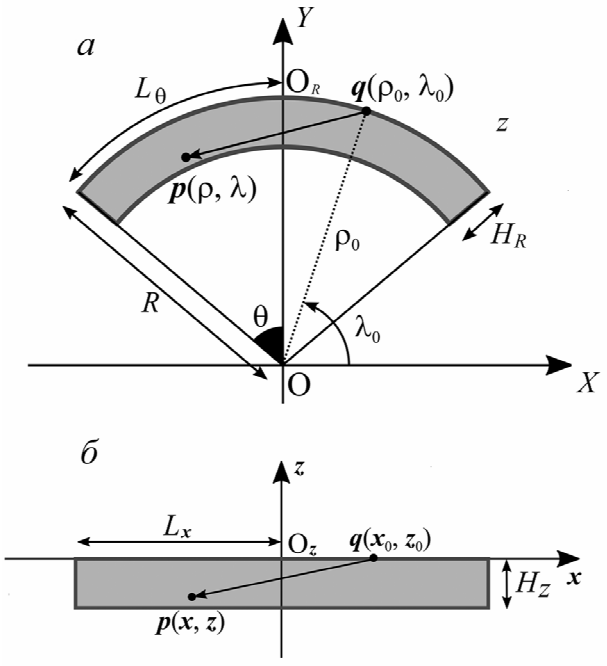


Рис. 2. Цилиндрический сегмент в полярной геоцентрической системе координат (*а*) и соответствующий ему горизонтальный пласт бесконечного простирания в системе плоских прямоугольных координат (*б*). Условные обозначения и пояснения здесь и далее в тексте

При условии существования определенного интеграла (1), решение прямой задачи гравиметрии является единственным: поле $\vec{g}$ однозначно вычисляется по заданному распределению суммируемой плотности σ. Не возникает и особых технических проблем с вычислением объемного интеграла. А во многих интересных приложениях и, практически важных, случаях первообразная функция массового интеграла вычисляется аналитически.

Двумерные плотностные модели

Несомненно, что максимальную точность и быстродействие расчетных алгоритмов удаётся получить в тех случаях, когда для составляющих градиента потенциала оказывается возможным получить явные аналитические выражения в элементарных трансцендентных функциях. Для типовых аппроксимирующих элементов двумерных плотностных моделей решение прямой задачи гравиметрии выписывается в явном аналитическом виде. В качестве таких элементов удобно использовать двухмерный угловой сектор горизонтального цилиндра и соответствующий ему бесконечный горизонтальный пласт (рис. 2). Плотности тел постоянна и равна $\sigma = 1$ г/см^3.

Сравним поле V_z на поверхности «плоской» Земли от горизонтального пласта бесконечного простирания мощностью H_z и шириной $2L_x$ с полем V_R на поверхности «сферической» Земли (R = 6371 км) от углового цилиндрического сектора той же мощности ($H_R = H_z$) и длиной дуги $2L_\theta$, равной ширине пласта ($2L_\theta = 2L_x$). Мощность пласта фиксирована и составляет $H_z = H_R$ = 80 км. Ширина пласта и длина

дуги цилиндрического сектора варьируются в зависимости от угла раствора последнего $2L_\theta = 2R\theta$ (см. рис. 2*а*). Так, при угле раствора $2\theta = 6°$ длина дуги сектора и, соответственно, равная ей ширина горизонтального пласта $2L_\theta = 2L_x = 667$ км; при угле $2\theta = 24°$ – в четыре раза больше $2L_\theta = 2L_x = 2668$ км.

Определим геометрические параметры области D для цилиндрического сектора, симметричного относительно вертикальной оси OY:

$$D = \{(\rho,\lambda,Z) \,|\, \rho \in (R - H_R, R),$$
$$\lambda \in (\pi/2 - \theta, \pi/2 + \theta), Z \in (-\infty,+\infty)\}.$$

Напряженность гравитационного поля равна градиенту потенциала. Чтобы найти составляющую двумерного поля по нормали к образующей цилиндра в полярных координатах $\sum(\rho,\lambda)$, достаточно подставить расстояние (3) в формулу (1), и проинтегрировать радиальную составляющую поля по переменной Z в бесконечных пределах (Шванк, Люстих 1947):

$$V_R = g_R(\rho_0,\lambda_0) = \gamma\sigma \int_{R-H_R}^{R} d\rho \int_{\pi/2-\theta}^{\pi/2+\theta} d\lambda \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(\rho\cos(\lambda-\lambda_0) - \rho_0)dZ}{(\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\lambda-\lambda_0) + (Z-Z_0)^2)^{3/2}}.$$

После интегрирования по Z в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, получаем:

$$g_R(\rho_0,\lambda_0) =$$
$$= 2\gamma\sigma \int_{R-H_R}^{R} \rho d\rho \int_{\pi/2-\theta}^{\pi/2+\theta} \frac{(\rho\cos(\lambda-\lambda_0) - \rho_0)dZ}{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\lambda-\lambda_0)}.$$

Двумерный интеграл для углового сектора 2θ в полярной системе координат (ρ,λ) (вычисляется в явном виде.

$$g_R(\rho_0,\lambda_0) = \frac{2\gamma\sigma}{\rho_0} \int_{R-H_R}^{R} \rho d\rho \times$$
$$\times \operatorname{arctg}\left(\frac{\rho+\rho_0}{\rho-\rho_0}\operatorname{tg}\left(\frac{\lambda-\lambda_0}{2}\right)\right)\Bigg|_{\lambda=\pi/2-\theta}^{\lambda=\pi/2+\theta} -$$
$$- \frac{\gamma\sigma\rho^2(\lambda-\lambda_0)}{2\rho_0}\Bigg|_{\lambda=\pi/2-\theta}^{\lambda=\pi/2+\theta}\Bigg|_{\rho=R-H_R}^{\rho=R}.$$

Или, полагая $k = \rho/\rho_0$; $\psi = \lambda - \lambda_0$, имеем

$$g_R(\rho_0,\varphi_0) = \gamma\sigma\rho_0\left(k^2\operatorname{arctg}\left(\frac{k+1}{k-1}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right) + \right.$$
$$+ \cos(2\psi)\operatorname{arctg}\left(\frac{k-\cos\psi}{\sin\psi}\right) +$$
$$+ \sin(2\psi)\ln\sqrt{1+k^2-2k\cos\psi} + \qquad (5)$$
$$\left. + k\sin\psi - k^2\frac{\psi}{2}\right)\Bigg|_{\pi/2-\theta-\lambda_0}^{\pi/2+\theta-\lambda_0}\Bigg|_{(R-H_R)/\rho_0}^{R/\rho_0}.$$

Здесь первообразная по ψ и k последовательно вычисляется в 4-х граничных точках пределов интегрирования.

Вертикальная составляющая поля от однородного горизонтального пласта бесконечного простирания (горизонтальной полосы) вычисляется аналогично. Зададим параметры области D в декартовых прямоугольных координатах (x, y, z) (см. рис. 2*б*):

$$D = \{(x,y,z) \,|\, x \in (-L_x,+L_x);$$
$$y \in (-\infty,+\infty); z \in (-H_z,0)\}.$$

Если в формуле для расстояния (2) все прописные символы координат точек p и q заменить на строчные $\vec{p} = (x,y,z)$ и $\vec{q} = (x_0,y_0,z_0)$, то следующие формулы будут справедливы.

Подставляя расстояние (2) в формулу (1) и интегрируя по простиранию y в бесконечных пределах, получаем:

$$V_z = g_z(x_0,y_0,z_0) = \gamma\sigma \int_{-H_z}^{0} (z-z_0)dz \times$$
$$\times \int_{-L_x}^{L_x} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^3}} =$$
$$= 2\gamma\sigma \int_{-H_z}^{0} (z-z_0)\,dz \int_{-L_x}^{L_x} \frac{dx}{(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

Двойной интеграл для горизонтальной полосы имеет явную первообразную (Гравиразведка, 1990):

$$g_z(x_0,z_0) = \gamma\sigma\Big((\xi-x)\ln((\xi-x)^2 + (\zeta-z)^2) +$$
$$+ 2(\zeta-z)\operatorname{arctg}\left(\frac{\xi-x}{\zeta-z}\right)\Big)\Bigg|_{\xi=-L_x}^{\xi=L_x}\Bigg|_{\zeta=-H_z}^{\zeta=0}. \qquad (6)$$

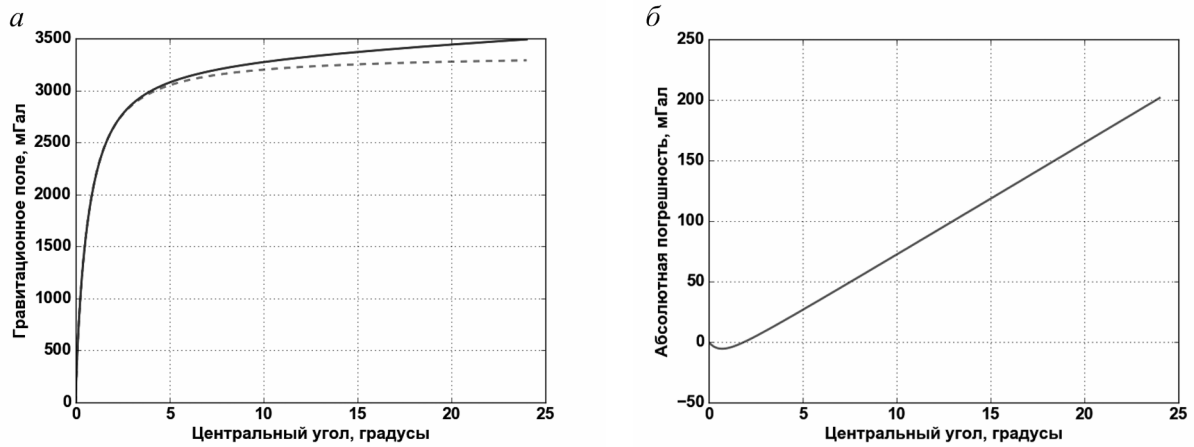


Рис. 3. Графики изменения нормальной составляющей модельного поля в центральных точках цилиндрического сектора и горизонтального пласта: *а*) поле сектора в точке O_R (сплошная линия) и поле горизонтального пласта в точке O_z (пунктирная линия); *б*) разность поля сектора и поля

Вычисленные значения поля g_z «плоской» и g_R «секторной» модели будут сравниваться во всех соответствующих точках профилей на одних и тех же расстояниях относительно начала поверхностных координат O_z и O_R – точек пересечения профилей с осями симметрии. Это следует из того, что при проецировании координат точек счета с дугообразного профиля на прямую линию расстояния между ними сохраняются. Но, поскольку составляющие поля (5) и (6) сориентированы по направлению внешней нормали, числовые значения, необходимые для интерпретации силы притяжения, следует брать с противоположным знаком.

На рис. 3*а* приведены графики полей в центральных точках O_z и O_R ($\lambda = \pi/2$) для «плоской» и «сферической» модели в функции угла раствора (длины дуги) цилиндрического сектора; на рис. 3*б* – их разность в единицах мГал. Мощности пластов одинаковы и составляют $H_R = H_z = 80$ км; объемная плотность масс $\sigma = 1$ г/см^3.

Здесь и далее символом «*s*» (spherical) будем обозначать аномалии поля, рассчитанные на поверхности «сферической» Земли; символом «*f*» (flat) – аномалии поля, рассчитанные на плоскости. Поправка за «сферичность» вводится как разность полей (*s* – *f*) «сферической» и «плоской» геометрии. Относительная (по отношению к полю на сфере) поточечная погрешность выражается в процентах $(s - f) / s \times 100$ %.

Как видим из рис. 3, аномалии в точке симметрии O_R на поверхности кругового сектора больше, чем в соответствующей проективной точке O_z на поверхности пласта. Тенденция нарушается лишь при малых углах раствора θ. Разность аномалий в эпицентральных точках (*s* – *f*) линейно растет с увеличением ширины пласта (углового расстояния) (см. рис. 3*б*), но в относительной мере составляет единицы процентов. Для шестиградусной зоны, т. е. при ширине пласта 667 км, относительная поправка за сферичность в центральной точке менее 1 %. Для сравнения, относительная поправка в центре широкой полосы 2668 км ($2\theta = 24^o$) достигает 6 %.

На рис. 4 показаны уже профильные значения вычисленных полей для «сферической» и «плоской» моделей, а также их поточечная разность в абсолютных (в мГал) и относительных единицах (в %). Эти примеры построены по рис. 3 и относятся к двум углам раствора 6 и 24 градуса. В первом случае – это угол раствора одной шестиградусной зоны Гаусса-Крюгера; в другом – угол раствора для четырех зон.

Относительная среднеквадратичная погрешность составила для 6-ти градусного раствора 1,26 %, для 24-х градусного –

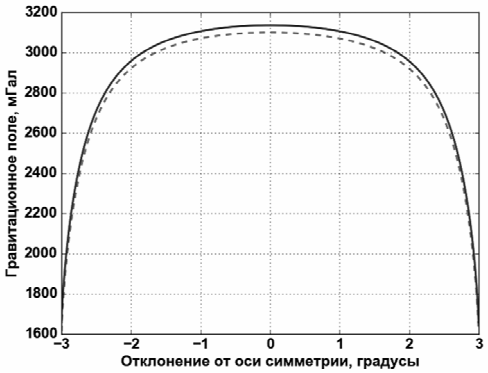
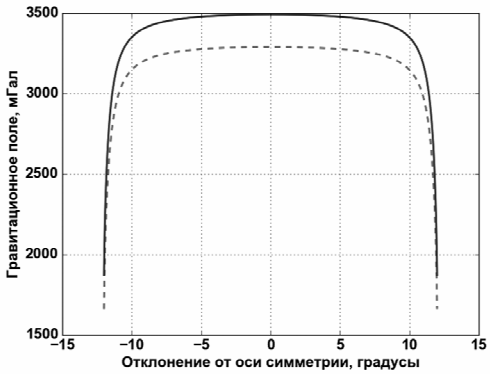
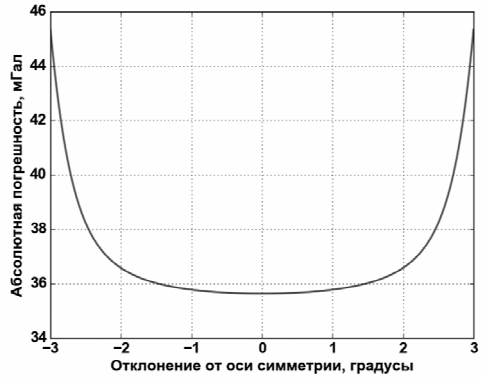
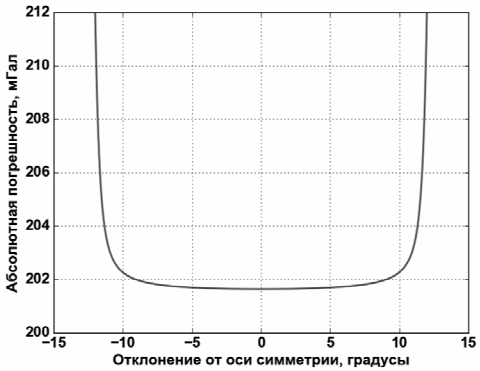
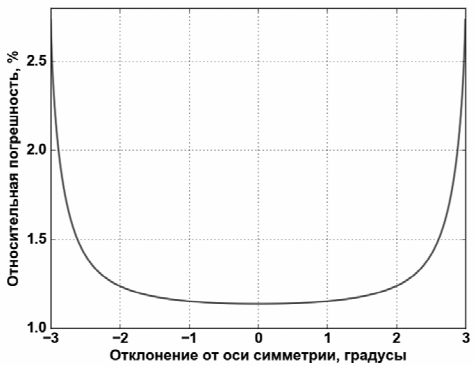
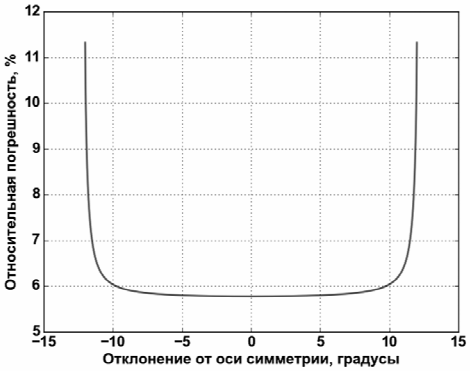
Угол раствора 2θ = 6°	Угол раствора 2θ = 24°	
		Модельное гравитационное поле
		Абсолютная погрешность
		Относительная погрешность

Рис. 4. Графики нормальной составляющей модельного поля для сектора горизонтального цилиндра и горизонтального пласта бесконечного простирания для 6-ти и 24-х градусных растворов

5,94 %. Относительная разница объемов тел сферической и плоской модели не более 0,63 %.

Полученные аналитические оценки поправки за «сферичность» в поле двумерных моделей, безусловно, являются предварительными, но характеризуют порядок возможные искажения полей при переходе с криволинейной поверхности на плоскость.

Трехмерные модели с сингулярным распределением плотности

В рамках более сложной трехмерной модели сопоставим на поверхности «сферической» и «плоской» Земли гравитационные аномалии от нескольких изолированных шаров разных размеров и разной плотности. Будем исходить из двух условий, накладываемых на преобразования поверхностных координат и глубин:

1. В пределах одной шестиградусной зоны Гаусса-Крюгера при отображении сферы на плоскость линейные расстояния сохраняются вдоль осевого меридиана и почти не меняются (с погрешностью, не более 0,1 %) вдоль параллели.

2. Глубина залегания центра шаров, отсчитываемая от поверхности сферы по направлению внутренней нормали, и глубина до центра отображаемых шаров от верхней граничной плоскости в соответствующих точках отображения приравниваются друг к другу.

Пусть OA расстояние вдоль некоторой дуги S_R большого круга, OA' – расстояние по прямой в плоскости S_z. AC – глубина до центра залегания реального шара радиуса a, $A'C'$ – глубина до центра отображаемого тела, форма которого (с учетом допустимых искажений) близка к исходному шару (рис. 5). Согласно условиям (1–2), накладываемых на отображение $S_R \Rightarrow S_Z$ сферы на плоскость, $OA = OA'$ и $AC = A'C'$.

Чтобы получить нормальную составляющую поля на поверхности сферы S_R, достаточно в векторной формуле (1) для напряженности поля выразить расстояние (4) в сферических координатах $\sum(r,\varphi,\lambda)$, и для радиальной составляющей на сфере положить $r_0 = R$:

$$V_R = g_R(R,\varphi_0,\lambda_0) =$$

$$= \gamma \int_D \sigma(r,\varphi,\lambda) \frac{(r\cos\omega - R) r^2 \cos\varphi dr d\varphi d\lambda}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\omega)^3}},$$

где $\cos\omega = \sin\varphi \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cos\varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)$; ω – угол видимости отрезка $|\vec{p} - \vec{q}|$.

Известно, что поле во внешности однородного шара с плотностью σ_a вычисляется как поле точечной массы, равной полной массе шара (Шванк, Люстих, 1947). Это означает, что объемное распределение плотности внутри шара приравнивается к сингулярной δ-функции, сосредоточенной в его центре (Владимиров, Жаринов, 2000):

$$\sigma(r,\varphi,\lambda) = \frac{M}{r^2 \cos\varphi} \delta(r - r_C) \times$$

$$\times \delta(\varphi - \varphi_C) \times \delta(\lambda - \lambda_C),$$

где $M = 4/3 \times \pi a^3 \sigma_a$ – масса шара.

Следовательно:

$$g_R(R,\varphi_0,\lambda_0) = \gamma M \frac{(r_C \cos\omega_C - R)}{\sqrt{r_C{}^2 + R^2 - 2r_C R\cos\omega_C)^3}}. \quad (7)$$

Или в более компактной векторной записи:

$$g_R = (\vec{n}_R, \nabla_q V), \text{ где} \nabla_q V = \gamma M \frac{\vec{p}_C - \vec{q}}{|\vec{p}_C - \vec{q}|^3}. \quad (8)$$

Поскольку при отображении шаров реальный центр (точка C) переходит в точку отображения C', а полная масса шара сохраняется, то формула (8) будет инвариантна относительно перехода к системе поверхностных прямоугольных координат Гаусса-Крюгера. Следовательно, для вертикальной составляющей поля вдоль оси «z» получим аналогичную формулу:

$$g_z(x_0,y_0,0) = (\vec{n}_z, \nabla_q V) =$$

$$= \gamma M \frac{z_C}{\sqrt{((x_C - x_0)^2 + (y_C - y_0)^2 + z_C^2)^3}}. \quad (9)$$

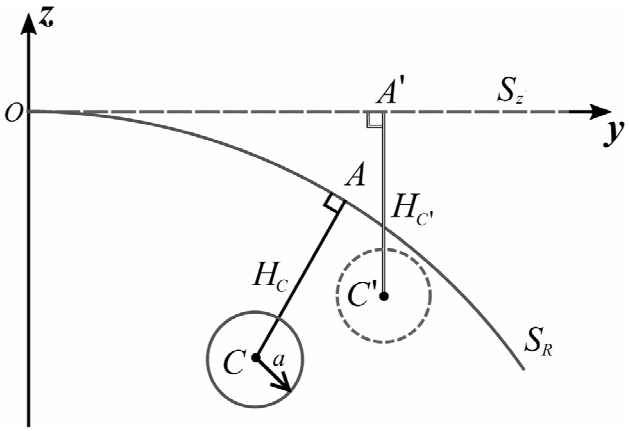


Рис. 5. Смещение положения аномалеобразующих объектов при вводе сферической модели

Формулы (7)–(9) являются выражением закона Ньютона притяжения точечных

материальных масс и, в своем простейшем варианте, являются основой для аналитической оценки на сфере и плоскости аддитивных аномалий гравитационного поля для семейства шарообразных тел с однородной плотностью. Результаты аналитических расчётов для точечных материальных масс были сопоставлены с ранее опубликованными данными количественной интерпретации, выполненной коллегами из Пермского горного института по результатам численного гравитационного моделирования. На примерах аналогичных моделей однородных шаров с постоянной плотностью сравнивались значения гравитационных аномалии, вычисленных численными и аналитическими методами, а также анализировалась поправка за влияние сферичности Земли в профильном и площадном вариантах.

Пример 1: Цитата (Долгаль и др., 2015, с. 58): «Профиль гравиметрических измерений длиной 300 км проходит по меридиану от северного полюса к югу и включает в себя 151 точку измерений. В нижнем полупространстве располагаются два аномалиеобразующих объекта – шары диаметром 8 и 12 км, обладающие избыточной плотностью 0,1 и 0,15 г/см^3, соответственно. Центры шаров в системе $\sum(x,y,z)$ имеют координаты $x1 = 100$, $z1 = 20$; $x2 = 200$, $z2 = 30$ (в км), профиль проходит непосредственно над ними ($y = 0$)».

Пример 2: Цитата (Долгаль и др., 2015, с. 58): «Площадь гравиметрических измерений имеет форму квадрата со стороной 200 км, сеть измерений 2×2 км. Аномалии силы тяжести обусловлены пятью шарами, параметры которых приведены в табл. 1. Глубины центров сфер H отсчитываются от поверхности измерений».

Для большей наглядности и простоты анализа обеих модельных примеров в табл. 1 указаны геометрические параметры залегания и плотности шаров в профильном и площадном вариантах. Линейные

Таблица 1. Параметры аномалиеобразующих тел в профильном и площадном вариантах

Точки расчета модельного поля	Номера тел (шаров)	Параметры расчетных моделей				
		x, км (по долготе)	y, км (по широте)	Глубина H, км	Радиус шара r, км	Плотность, s, г/см^3
Профиль 300 км	1	-	100	20	8	0,1
	2	-	200	30	12	0,15
Площадь 200×200 км^2	3	150	25	5	3	0,5
	4	100	100	12	8	0,3
	5	35	175	8	5	0,25
	6	125	45	7,2	4,5	0,15
	7	15	50	10	5	0,2

Примечание: начало системы прямоугольных координат $\sum(x,y,z)$ – левый нижний угол модельной площади, ось Oz правой системы координат направлена вверх. Поэтому интерпретируемые значения гравитационных аномалий следует брать с противоположным знаком.

Таблица 2. Значения эпицентральных аномалий

Размерность модельного решения	Номера тел (шаров)	Масса шара в 10^{15} г	Значения эпицентральных аномалий			
			Гравитационное поле, мГал		Абсолютная погрешность $(s-f)\times 10^{-3}$, мГал	Относительная погрешность $(s-f)/s \times$ $\times$ 100 %
			Сферическая модель "*s*"	Плоская модель "*f*"		
Пример 1 Профиль 300 км	1	214,47	3,7747	3,7685	6,2546	0,17
	2	1085,73	8,0775	8,0763	1,1838	0,015
Пример 2 Площадь 200x200 км^2	3	56,55	14,3937	14,3866	7,0796	0,049
	4	643,4	29,8434	29,8413	2,1095	0,0071
	5	130,9	13,095	13,0897	5,3408	0,041
	6	57,26	7,2623	7,2536	8,7541	0,12
	7	104,72	6,9487	6,944	4,7894	0,069

расстояния и глубины указаны в пространственных прямоугольных координатах для плоской модели «*f*» (flat) земной поверхности. На сферической поверхности «*s*» (spherecal): линейные расстояния и превышения пересчитываются по параметрическим формулам Гаусса-Крюгера обратного преобразованием координат при выполнении основных принципов (см. выше условия 1–2): линейные расстояния и превышения относительно сферы и плоскости остаются практически неизменными.

В табл. 2 приведены расчетные параметры полных масс по каждому из шаров и, в соответствие с величиной масс, коррелируемые им значения эпицентральных аномалий на сферической «*s*» (spherical) и плоской поверхности «*f*» (flat). Результаты даны для профильного и площадного вариантов вычислений, согласно исходным данным табл. 1.

На рис. 6 приведены сравнительные графики вычисленных полей g_R и g_z в профильном (слева) и площадном вариантах (справа), а также и абсолютная и относительная погрешность их разности. На небольших расстояниях (в пределах одной шестиградусной зоны) аномалии полей на сфере «*s*» и плоскости «*f*» для обоих примерах практически не различимы и совпадают в масштабе рисунков верхнего ряда. Во втором ряду рис.6 указаны разности полей $(s-f)$ («сфера–плоскость») в тех же абсолютных единицах (мГал), но более чем в стократно увеличенном масштабе по вертикальной оси. Поточечная относительная (к полю на сфере) погрешность дана в процентах.

В этих примерах (см. табл. 2) максимальная поправка за сферичность Земли в абсолютные значения «плоских» аномалий в эпицентральных точках не превосходит 0,01 мГал, а относительная погрешность «эффекта кривизны» в тех же точках составляет менее 0,2 %. По мере удаления от эпицентров шаров относительная погрешность увеличивается, и по краям планшета (в профильном или площадном вариантах) может достигать 12 %. Учитывая рафинированность постановки данной задачи для модели изолированных локальных тел **в пустом пространстве** а, следовательно, имеющуюся тенденцию нулевых асимптотических значений поля при удалении от источников, **такая оценка относительной погрешности** не может рассматриваться

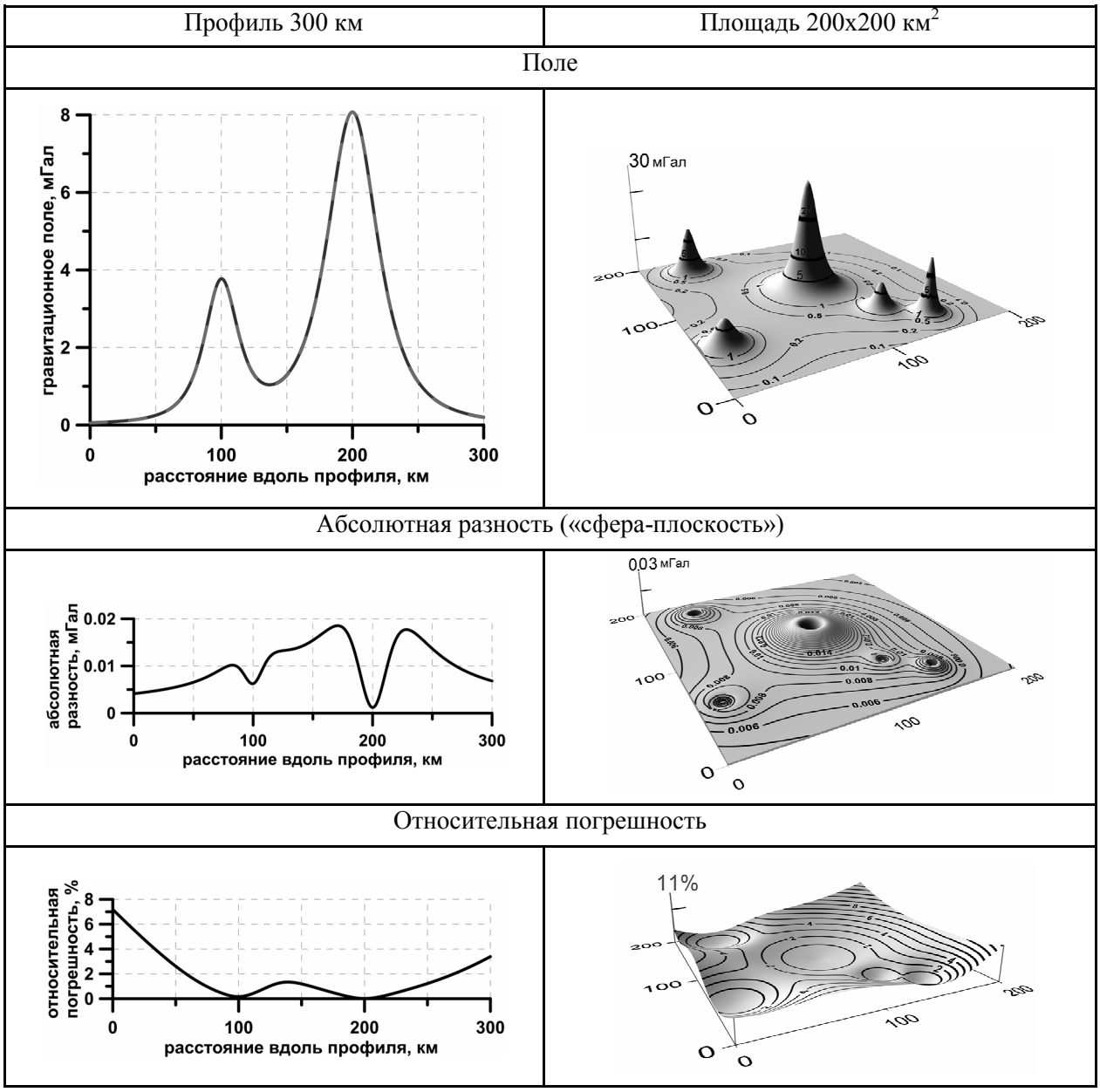


Рис. 6. Профильные и площадные аномалии от изолированных шаров для сфероидальной (сферическая система координат) и плоской геометрии (прямоугольная система)

как состоятельная. Из-за небольшого различия в скорости затухания полей вдали от источников локализированных масс на сфере и плоскости частное двух малых величин «f/s», как функция расстояний, имеет неопределенное значение. Мы считаем, что в таких моделях (при необходимости) целесообразнее использовать отношение среднеквадратических величин изменения полей. При этом надлежащим образом будут учитываться не только области залегания аномальных масс, но также и все окружающее пустое пространство. Так, для рассматриваемых примеров относительная среднеквадратичная погрешность составила 0,38 % в профильном и 0,39 % и площадном варианте.

Замечание. В рамках данной модели, также, были посчитаны поля от изолированных тел (шаров) на «эллипсоидальной» поверхности Земли с параметрами эллипсоида Красовского. Все действия по переносу координат центров шаров (глубин) и точек счета поля с плоскости на поверхность эллипсоида были выполнены аналогично предыдущим примерам по парамет-

рическим формулам обратного преобразования Гаусса-Крюгера (Морозов, 1979). Программные модули численной реализация алгоритма прямого и обратного преобразования поверхностных координат имеются в открытом доступе системы «Internet», например (Karney, 2017), а также в геоинформационной системе «ArcGIS» и «Global Mapper».

Полученные результаты для эллипсоидальной модели практически не отличаются от модели шарообразной Земли с радиусом 6371 км. Поправки за «эллипсоидальность» формы поверхности Земли получились такими же, как и для «сферической». И это не случайно. Для площадей, в несколько десятков тысяч квадратных километров (градусной трапеции порядка 3°×3° и более, но в пределах одной шестиградусной зоны Гаусса-Крюгера), разницей в топографии превышения высот и изменением длин геодезических линий на эллипсоиде и шаре можно пренебречь (Макаров, 1968). Однако следует подчеркнуть, что относительно модели «плоской» Земли поправка за «эллипсоидальную» форму земной поверхности **принципиально меньше**, чем за «сферическую». Эта разница не заметна на моделях малых и средних размеров, но будет значимой на площади более десятка градусов по широте или долготе, особенно в приполярной области. Поэтому, если и учитывать поправку за «сферичность», при высокоточном региональном плотностном моделировании, то следует пользоваться точными формулами Гаусса-Крюгера прямого и обратного преобразования координат на поверхности эллипсоида вращения. Тем более что существующее программное обеспечение и мощность современных компьютеров вполне это позволяют.

Поправка за сферичность в моделях субвертикального проектирования

Еще в середине прошлого века П.И. Лукавченко (Лукавченко, 1951) при вычислении поправки за влияние рельефа с учетом сферичности Земли предложил простые формулы учета превышения рельефа, основанные на вертикальном перемещении окружающих масс относительно горизонтальной плоскости, касательной в точке гравиметрического пункта наблюдений. Та же схема учета поправки за рельеф при вертикальном проектировании масс с поверхности сферы на касательную плоскость в точке наблюдения использовалась и другими исследователями (Хохлова, 2015).

Схема вертикальных перемещений (ВП) отметок высот рельефа относительно горизонтальной плоскости была применена и при редуцировании глубин аномальных масс от поверхности сферы. Цитата (Бычков и др., 2015, с. 96–97): «Теперь представим, что на сферической земле выполняются измерения радиальной составляющей силы притяжения V_R, при этом отчет глубин возмущающих тел также проводится от поверхности наблюдений». Цитата (Долгаль и др., 2015, с. 58): «Как очевидно, различия гравитационного поля для идеализированной (плоской) и квазиреальной (сферической) интерпретационных моделей являются нелинейными и достаточно значительными, поэтому можно поставить вопрос о целесообразности их учета в процессе количественной интерпретации материалов гравиметрических съемок …. Физической природой этих изменений является, в первую очередь, субвертикальное перемещение источников поля при геометризации модели, обусловленное изменением формы земной поверхности. Различия между компонентами поля V_z и V_R для сравнительно небольших по размерам площадей играют второстепенную роль».

Столь важный вывод был сделан на основании анализа модельных примеров 1 и 2 (см. табл. 1), но выполненного по результатам численного моделирования в рамках схемы вертикального проектирования (далее ВП). Результаты численного моделирования настолько отличаются от наших данных в табл. 2, что мы проанализировали возможную причину подобного несоответствия.

На рис. 7 изображена схема положения однородного шара относительно поверхности «сферической Земли» S_R на меридио-

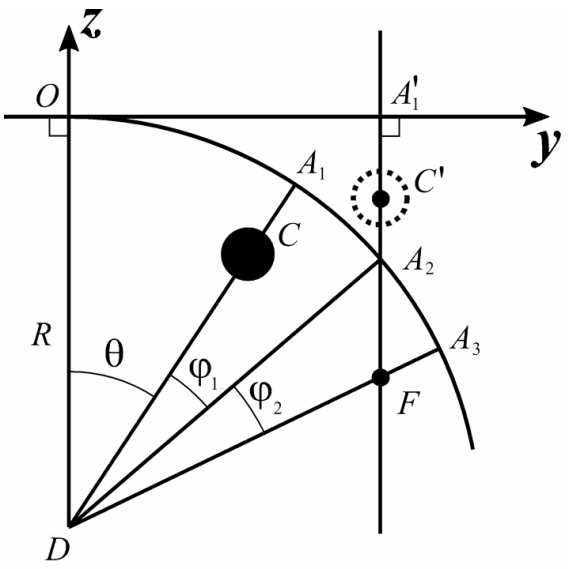


Рис. 7. Положение шара и схема соответствия координат при вертикальном проектировании (ВП) и отображении Гаусса-Крюгера (GK)

нальном профиле с началом в точке O. Эпицентр шара находится в точке A_1, центр шара – в точке C на глубине H_R = = A_1C. Точки A'_1 и C' соответствуют центрам проективного шара (GK) относительно горизонтальной касательной плоскости S_z в точке O. Глубина до центра проективного шара $H_z = A'_1C'$ отсчитывается по вертикали вниз от касательной плоскости. Данная схема предполагает различные способы сопоставления координат точек на сфере и плоскости. С ее помощью можно сравнить гравитационные эффекты, вычисленные для модельных примеров 1 и 2 (см. табл. 1, 2), при двух способах отображения плоскости на сферу: или проекции по вертикальным прямым в сечении профиля (ВП), или обратном преобразовании координат Гаусса-Крюгера (GK^{-1}).

Приведем описание схемы координатного соответствия. Пусть$\sum(x,y,z)$ – прямоугольная декартова система координат, соотнесенная с начальной точкой профиля на горизонтальной плоскости S_z. Расстояние по профилю на плоскости измеряется от начала координат O вдоль оси y; глубина на профиле отсчитывается от плоскости вдоль отрицательного направления оси z. «Сферический» профиль идет вдоль окружности S_R радиуса R с центром в точке $D \in Oz$, которая касается «плоского» профиля в начале координат O. Расстояния вдоль меридионального профиля на сфере измеряются от точки O по дуге окружности в направлении возрастания угла θ.

При прямом отображении Гаусса-Крюгера (x,y) = GK(φ,λ) меридиональная дуга профиля OA_1 на сфере S_R отображается без искажений в отрезок прямой линии OA'_1, расположенной вдоль оси «*Oy*» на касательной плоскости S_z. Глубина точек (отрицательные превышения) отсчитывается по направлению внутренних нормалей к поверхности сферы и плоскости в соответствующих проективных точках (см. рис. 5 настоящей работы). При этом выполняются оба правила соответствия координат отображения (см. рис. 7): не меняются латеральные расстояния в конформной проекции ($OA_1 = OA'_1$) и сохраняются глубины до центров масс ($H = A_1C = A'_1C'$).

При вертикальном проектировании (ВП) исходят из схемы соответствия центра шара C', расположенного под касательной плоскостью S_z и его вертикально перемещенного изображения F под поверхностью сферы S_R. По этой схеме (Долгаль и др., 2015) предлагается выбирать изображение F на ортогональной к «плоскому» профилю прямой A'_1C' так, чтобы расстояние A_2F от точки A_2 пересечения окружности S_R с прямой A'_1C' совпадало с глубиной A'_1C' залегания точки C' в «плоском» разрезе: $A'_1C' = A_2F = H$. Тем самым утверждается, что глубины залегания точек в «плоском» и «сферическом» разрезах измеряются **вдоль одной и той же вертикальной прямой** и численно совпадают.

Пусть нам нужно найти образ F некоторой точки C' «плоского» разреза, расположенной на расстоянии OA'_1 и на глубине $A'_1C' = H$, в разрезе «сферическом» $H_z = H_R = H$. Прямая A_2F не ортогональна «сферическому» профилю (иначе центр окружности D должен лежать на A_2F, что невозможно, т. к. прямые OD и A_2F параллельны). При такой схеме вертикального проектирования **нарушается условие сохранения длины линейных элементов** при конформном отображении сферы на плоскость, поскольку расстояния вдоль «плос-

кого» профиля для точки C' и ее образа F вдоль «сферического» профиля отличаются принципиально: $OA_1' \neq \breve{OA}_2$.

Выразим $\breve{OA}_2$ через OA_1'(все углы в радианах):

$\breve{OA}_2 = R \times \angle ODA_2, \sin(\angle ODA_2) = \frac{OA_1'}{DA_2} = \frac{OA_1'}{R}$,

$\breve{OA}_2 = R \arcsin\left(\frac{OA_1'}{R}\right)$. Обозначим $\theta = \frac{OA_1'}{R}$ – угловая мера дуги $\breve{OA}_1 = OA_1'$, тогда $\breve{OA}_2 = R \arcsin(\theta)$, $OA_1' = R\theta$. Отсюда при $\theta < 1$ сразу получаем $OA_1' < \breve{OA}_2$ Ситуация $\theta \geq 1$ не имеет смысла для схемы (ВП), т. к. в этом случае $OA_1' \geq R$ и проективная прямая $A_1'C'$ нигде не пересекает окружность S (при $\theta = 1$ только касается ее). Угловая мера «дефекта расстояний» (дуги $\breve{A_1A_2}$) $\varphi_1 = \arcsin(\theta) - \theta$.

Далее, сравним положение и величину максимумов вертикальной компоненты напряженности гравитационного поля точечной массы M, расположенной в точках C' и F, вычисленной для «плоского» и «сферического» профилей. На «плоском» профиле максимум поля точечного источника массой M, расположенном в точке C', будет находиться в точке A_1' (ближайшей к C' точке профиля) на расстоянии $OA_1' = R\theta$ от начала отсчета и иметь величину $g_{flat} = \frac{\gamma M}{H^2}$. На «сферическом» профиле максимум поля точечного источника, расположенного в точке F, будет находиться в A_3 – ближайшей к F точке профиля, на расстоянии

$$\breve{OA}_3 = R \arcsin \frac{R\theta}{\sqrt{R^2 + H^2 - 2RH\sqrt{1-\theta^2}}}$$ от начала отсчета и иметь величину

$$g_{spher} = \frac{\gamma M}{\left(R - \sqrt{R^2 + H^2 - 2RH\sqrt{1-\theta^2}}\right)^2}.$$

Таким образом, максимум поля на «сферическом» профиле сдвинется относительно соответствующего ему максимума на «плоском» профиле на расстояние

$$\breve{OA}_3 - OA_1' = \breve{OA}_3 - \breve{OA}_1 = \breve{A_1A_3} = R\left(\arcsin \frac{R\theta}{\sqrt{R^2 + H^2 - 2RH\sqrt{1-\theta^2}}} - \theta\right).$$

Относительное увеличение максимума поля будет равно

$$\frac{g_{spher} - g_{flat}}{g_{spher}} = \left(\frac{H}{R - \sqrt{R^2 + H^2 - 2RH\sqrt{1-\theta^2}}}\right)^2 - 1.$$

Если принять R = 6371 км (средний радиус Земли), глубину залегания точечного источника H = 20 км, расстояние вдоль «плоского» профиля от точки отсчета OA_1' = 300 км (соответствует $\theta \approx 2^o41'52''$), то «дефект расстояний» будет равен $\breve{OA}_2 - OA_1' \approx 111$ м, смещение максимума: $\breve{OA}_3 - OA_1' \approx 1{,}056$ км, относительное увеличение максимума поля:

$$\frac{g_{spher} - g_{flat}}{g_{spher}} \approx 0{,}22\ \%.$$

Отметим, если ставить в соответствие точке C' «плоского» разреза не точку F «сферического» разреза, а точку C, расположенную на радиусе DA_1 на расстоянии H от окружности (т. е. совпадают расстояния вдоль профилей и глубины залегания массы, глубина залегания в «сферическом» разрезе измеряется вдоль нормали к профилю – окружности S), то «дефекта расстояний», смещения максимума и увеличения амплитуды поля не наблюдается.

На рис. 8 показана разница вычисленных полей в абсолютных единицах (мГал) «сфера»–«плоскость» для двух точечных масс (шаров) в профильном варианте. Пунктирная кривая иллюстрирует величину поправки за сферичность, полученную методом субвертикального проектирования центров локальных тел (Бычков и др., 2015; Долгаль и др., 2015). Сплошная кривая соответствует нашим расчетам, выполненным в рамках проективного соответствия точечных масс вдоль меридионального профиля на сфере и плоскости с сохранением латеральных расстояний и глубин до центров шаров (см. Пример 1, рис. 6 настоящей работы).

Как видим, при неверно выбранной схеме проекции точек сферы на плоскость и нарушения основных принципов проектирования (равенство расстояний вдоль образов линий на поверхностях и равенст-

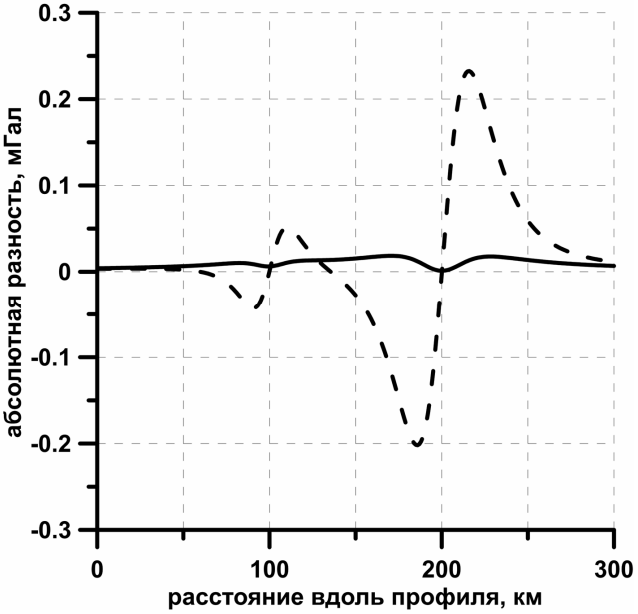


Рис. 8. Абсолютная разница полей «сфера»–«плоскость» для двух точечных масс (шаров) в профильном варианте) для схемы субвертикального проектирования (пунктирная линия) и схемы с сохранением расстояний и глубин (сплошная линия)

во глубин в соответствующих точках отображения), получающиеся значения поправки за сферичность весьма значительны. Их значения более чем на порядок отличаются от истинных. Но, чтобы прийти к окончательному заключению, необходимо провести численный эксперимент по гравитационному моделированию полей для пространственных тел с распределенной (объемной) плотностью (Wild-Pfeiffer et al., 2007; Долгаль и др., 2015).

Замечание. Аналогичная ошибка в искажении поверхностных расстояний обнаружена и в классических работах (Старостенко, Манукян, 1983; Старостенко и др., 1986). Искажения формы долготного сферического двуугольника, посредством его «разгибания» относительно осевого меридиана не учитывает поправки за угловое сближение сторон – сближение меридианов. Как следствие, неправильно преобразуются длины дуг по направлению широт. По этой причине результаты, полученные вышеупомянутыми авторами (Старостенко и др., 1986, с. 16–17, рис. 4–5 задачи 1–3), абсолютно справедливы для двумерных цилиндрических моделей, частично применимы для сравнительно узких и симметричных по широте экваториальных тессероидов и полностью не соответствуют действительности в непосредственной окрестности полюсов (Старостенко и др., 1986, с. 17, рис. 4б, 5б задачи 4).

Ошибки при отображении сферы на плоскость приводят к затратным и, зачастую, ненужным вычислениям в задачах гравитационного моделирования и нарушают логическую связность выводов последующей интерпретации геофизических полей.

Трехмерные модели с постоянной плотностью

При решении задач трехмерного плотностного моделирования на «плоской» Земле в качестве аппроксимирующих элементов удобно использовать модели вертикальных призм с произвольным основанием (Пятаков, Исаев, 2012). При построении моделей крупных геологических объектов или достаточно протяженных структур, когда необходимо учитывать влияние сферичности Земли, в качестве элементов аппроксимации следует применять модели сферических параллелепипедов (или тессероидов) (Старостенко, Манукян, 1983; Heck, Seitz, 2007; Wild-Pfeiffer et al., 2007; Uieda et al., 2015).

В сферической системе координат $\sum(r,\varphi,\lambda)$ тессероид определяется отрезками дуг больших кругов вдоль меридианов и отрезками дуг малых кругов вдоль параллелей. Глубина тессероида (мощность) равна разности радиусов, ограничивающих его двух концентрических сфер, и отсчитывается по направлению внутренней нормали: $H_R = (r_2 - r_1)$ (рис. 9*а*). В системе $\sum(x,y,z)$ декартовых координат соответствующая прямоугольная призма образована боковыми плоскими гранями вдоль оси «*y*» (проекциями кругов меридианов) и фронтальными криволинейными гранями вдоль оси «*x*» (проекцией широтных дуговых сегментов). Высота призмы $H_Z = (z_2 - z_1)$ отсчитывается по вертикали в отрицательном направлении оси «*z*» и равна мощности тессероида (рис. 9*б*).

Далее мы просто повторим уже известные результаты численного гравитацион-

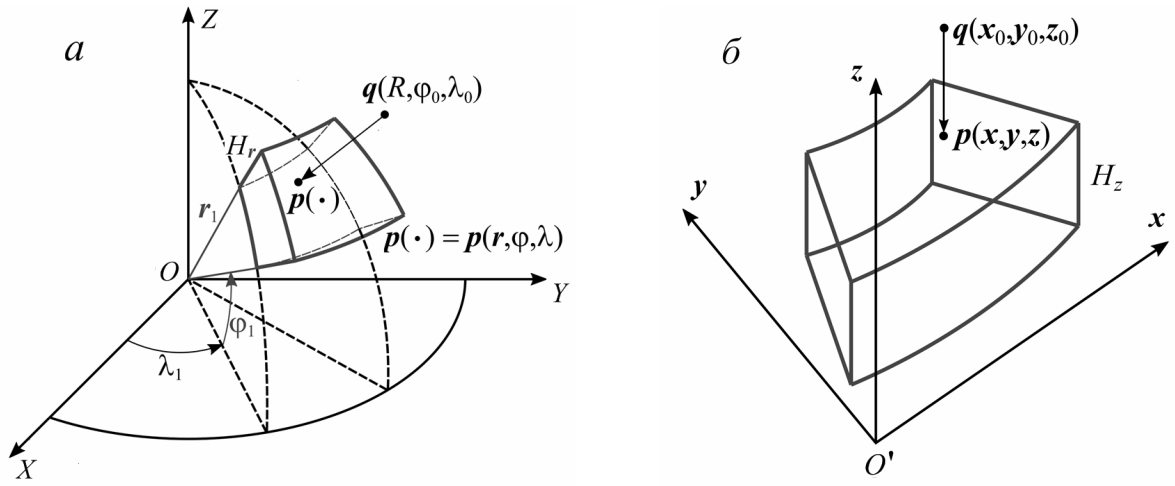


Рис. 9. Геометрия тессероида и соответствующей ему вертикальной призмы: *а*) в сферической геоцентрической системе координат $\sum(r,\varphi,\lambda)$; *б*) в системе прямоугольных координат $\sum xyz$ картографической проекции Гаусса-Крюгера. Точка p – переменная точка интегрирования внутри масс;

ного моделирования (Старостенко, Манукян, 1983; Старостенко и др., 1986) для элементарных тел (тессероида и вертикальной призмы) и сопоставим эти результаты с нашими вычислениями на «сферической» и «плоской» Земле.

Пусть D – область, соответствующая какому-либо элементу аппроксимации в сферической (см. рис. 9а) или декартовой системе координат (см. рис. 9б). Объем вертикальной призмы в координатах $\sum(x,y,z)$ равен произведению площади ее криволинейного основания $S(x,y)$ на высоту H_z : $\tau_z = (S(x,y)\times H_z)$; объем сфероидального параллелепипеда в координатах $\sum(r,\varphi,\lambda)$ также можно записать в виде «символического произведения (интеграла) переменной площади основания $S(\varphi,\lambda)$ на высоту H_R : $\tau_R = (S(\varphi,\lambda)\times H_R)$.

Исходя из формулы (1), запишем в виде повторных интегралов по области D выражения для нормальной составляющей гравитационного поля на плоскости и на поверхности сферы в системе поверхностных прямоугольных и сферических координат:

$$g_z(x_0,y_0,0) = \gamma\sigma \iint\limits_{S(x,y)} dxdy \times$$
$$\times \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{(z-z_0)dz}{\sqrt{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^3}}. \quad (10)$$

$$g_R(R,\varphi_0,\lambda_0) =$$
$$= \gamma\sigma \iint\limits_{S(\varphi,\lambda)} \cos\varphi d\varphi d\lambda \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{(r\cos\omega - R)r^2 dr}{\sqrt{(r^2+R^2-2rR\cos\omega)^3}}. \quad (11)$$
$$\cos\omega = \sin\varphi\sin\varphi_0 + \cos\varphi\cos\varphi_0\cos(\lambda-\lambda_0).$$

В формулах (10) и (11) интегралы по z и r берутся аналитически (Шванк и Люстих, 1947; Старостенко и др., 1986; Heck, Seitz, 2007), так что первообразные можно записать в функции глубины вертикальной призмы $H_z = (z_2 - z_1)$ или мощности тессероида $H_R = (r_2 - r_1)$. Пусть $F(x,y,H_z)$ и $F(\varphi,\lambda,H_R)$ – первообразные однократного интегрирования по глубине, тогда решения задачи (10) и (11) унифицируется единой формулой вычислению двойного интеграла:

$$g_N = \gamma\sigma \iint\limits_{S_\Omega} F(s)dS_\Omega, N = (R,z) \quad (12)$$

где S_Ω – площадь криволинейного основания вертикальной призмы или угловой элемент телесного угла видимости сферической поверхности тессероида из точки q.

Для вычисления двойного интеграла (12) был применен адаптивный кубатурный алгоритм Гаусса-Лежандра на основе пятиточечного шаблона аппроксимации подынтегральной функции $F(s)$. Метод Гаусса-Лежандра позволяет получить повышенную точность за счёт выбора неравномерного сеточного разбиения по области

интегрирования. Сложность вычисления подынтегральной функции не изменяется (т. к. не зависит от конкретного выбора узлов). При аппроксимации подынтегральной функции на пяти узлах неравномерной сетки порядок точности метода равен 9. Для оценки погрешности, поле было посчитано для нескольких разбиений поверхности: начиная от минимального 16×16 по (*x*,*y*) или (φ,λ), с последующим увеличением количество точек разбиения в 2 раза по каждой из координат. При этом относительная погрешность каждый раз уменьшается примерно в два раза, из чего можно сделать вывод о сходимости метода и оценить погрешность аналогом правила Рунге: $\in \geq |g(k) - g(k/2)|$, где $g(k)$ – результат вычисления выбранным методом, k – количество точек разбиения. При заданных k оценка погрешности вычислений метода приводится для $g(k/2)$.

При разбиении двумерной области задания поля и «поверхности» тела S_Ω узлами сетки 256×256, время вычисления гравитационного интеграла (12) по кубатурной формуле Гаусса-Лежандра при точности $\in \geq 6{,}4 \cdot 10^{-5}$ составило 475 с на CPU семейства Intel Xeon, с использованием 24-х процессорных ядер.

Из всего многообразия возможных примеров нам представляется целесообразным рассмотреть и сравнить гравитационные эффекты для моделей «малого» и «большого» сферических параллелепипедов, заданных в градусной мере на поверхности сферы и имеющих разную мощность по глубине. Эти модели специально сориентированы на демонстрацию искажения формы градусной трапеции на сфере и ее изображении на плоскости при прямом преобразования Гаусса-Крюгера $(x,y) = GK(\varphi,\lambda)$. Искажения форм пренебрежимо малы для небольших площадей на малых или средних широтах, но значимы в приполярных областях, даже в пределах одной шестиградусной зоны картографической проекции. Примеры для демонстрации заимствованы нами из ранее опубликованных источников.

Пример 3. Вычисление нормальной составляющей поля g_R на поверхности Земли для «малого» сферического параллелепипеда. Цитата (Долгаль и др., 2015, с. 60): «… вычисление V_R для объекта, ограниченного координатами $50° \leq \varphi \leq 50{,}5°$; $40° \leq \lambda \leq 40{,}2°$ и глубинами оснований 5 и 15 км, обладающего избыточной плотностью 0,2 г/см^3, на сферической Земле в 14641 точке квадратной сети размером 0,02°×0,02° (в линейной мере ~1,4×2,2 км)…».

Пример 4. (Старостенко и др., 1986). Вычисление нормальной составляющей поля g_R на поверхности Земли для «большого» сферического параллелепипеда $\varphi \in (75°; 80°)$ и $\lambda \in (87{,}5°; 92{,}5°)$, т. е. с углом раствора 5°×5° по широте и долготе. Верхняя кромка параллелепипеда выбрана на глубине 10 км: его мощность взята 70 км, так что общая глубина соответствует мощности верхней части литосферы Уральского региона (см., например Мартышко и др., 2011; 2016).

Результаты вычисления для обоих однотипных примеров мы, как и ранее (см. рис. 6), соединили в общий иллюстративный макет с изображением геометрии полей в изолиниях. Но здесь мы уже вынуждены поля на сфере «*s*» и на плоскости «*f*» показывать отдельно, поскольку искажение формы градусной трапеции весьма заметны для «большого» (но не «малого») тессероида. На рис. 10 в первом и втором ряду показаны поля g_R и g_z от сферических параллелепипедов и эквивалентных им вертикальных призм, рассчитанных на сферической и плоской Земле.

Следует отметить, что относительное искажение площадей в пределах одной шестиградусной зоны укладывается в норматив не более 0,2 %. Это означает, что при отображении дефект объема масс тессероидов будет весьма незначительным, поскольку отметки нормальных высот (мощность элементов) остаются прежними. Иногда этот дефект компенсируют изменением объёмной плотности масс (Uieda et al., 2015), но подобная корректировка является, на наш взгляд, совершенно излишней и привносит дополнительную неопределенность в схему интерпретации гравитационных аномалий. Таким образом,

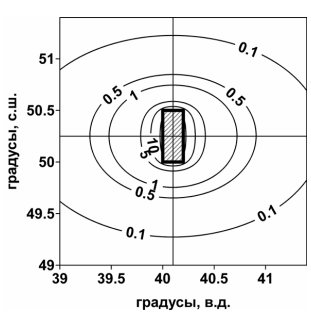
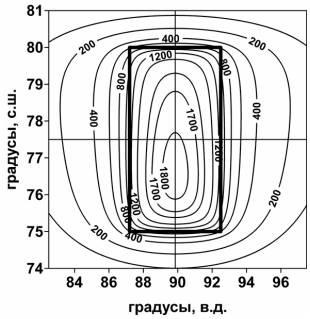
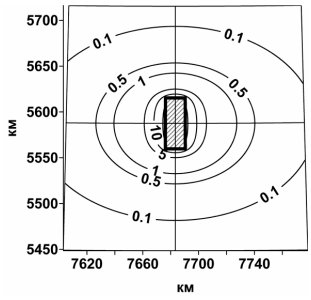
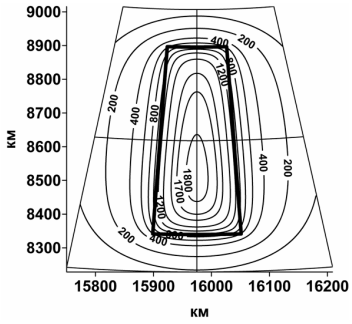
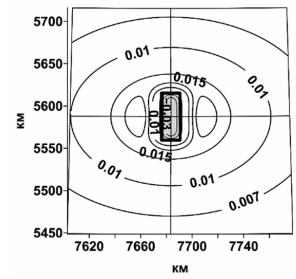
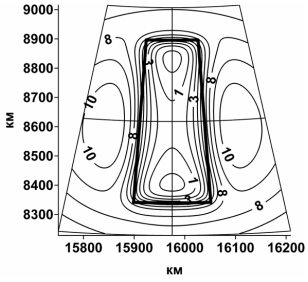
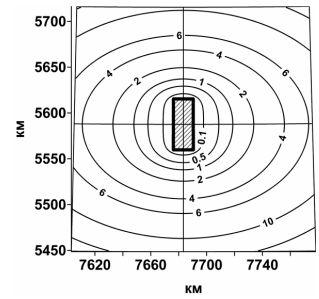
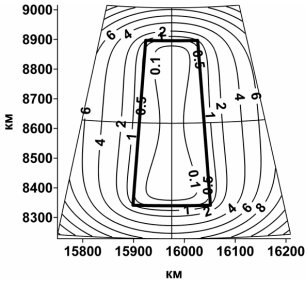
Пример 3. Малый сферический параллелепипед 0,5°×0,5°	**Пример 4.** Большой сферический параллелепипед 5°×5°	
		Модельное гравитационное поле на «сферической» Земле «*s*»
		Модельное гравитационное поле на «плоской» Земле «*f*»
		Абсолютная поточечная погрешность ($s - f$) мГал
		Относительная поточечная погрешность $(s - f)/s \times 100$ %

Рис. 10. Площадные аномалии от сферических параллелепипедов для сфероидальной «*s*» и плоской «*f*» геометрии (1 и 2 ряды рисунков таблицы). Поточечные разности (поправки за сферичность земной поверхности) в абсолютных (мГал) и относительных (%) единицах (3 и 4 ряды рисунков таблицы)

изменение амплитуд и геометрии вычисленных полей g_R и g_z обусловлено только различием в характере затухания поля во внешности тел в сферической и прямо-

угольной геометрии. Прежде всего, это проявляется в небольшой (сравнительно с амплитудными значениями полей) величине абсолютной поправки за сферичность, т. е. в разнице ($s - f$), или в относительной погрешности, выраженной в процентах (по отношению к полю на сфере). Ниже, в третьем и четвертом ряду того же рис. 10, приведены поточечные разности полей «сфера»–«плоскость» в абсолютных (мГал) и относительных (%) единицах.

Особо подчеркнем, что при существенно разных амплитудных значениях полей для малого и большого сферического параллелепипеда, относительная погрешность над центром масс оценивается не более чем в 0,1 %, при максимумах полей 32,22 мГал над центром «малого» тессероида (пример 3) и 1841,414 мГал – над центром «большого» (пример 4). Среднеквадратичная погрешность, которая характеризует все точки модельного планшета, включая точки масс и точки пустого пространства, составила 0,26 и 0,9 %, соответственно.

Как мы видим из рис. 10, характер искажений, т. е. форма разностного поля поправки за сферичность для однородного сферического параллелепипеда, практически остается такой же что для двумерных моделей, что и для трехмерных моделей «точечных» масс: искажения над центром тела минимальны, но увеличиваются на краях области заполнения масс и, проходя через максимум, затухают по мере удаления от источников. На рис. 11 даны профильные сечения по широте и долготе, проходящие над центрами «малого» и «большого» сферических параллелепипедов. Форма кривых отчетливо обрисовывает характер профильных изменений и подчеркивает их симметрию относительно

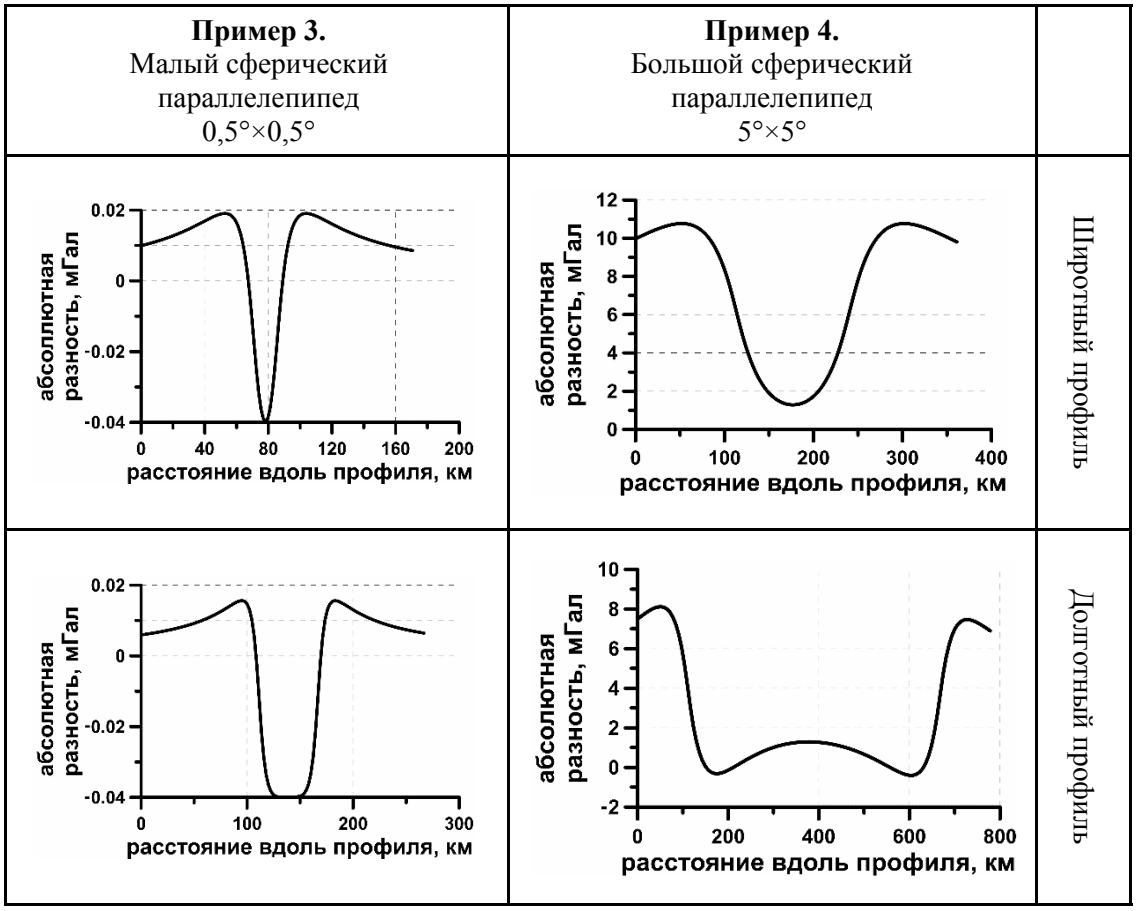


Рис. 11. Графики поточечной разности (поправки за сферичность земной поверхности) для широтного и долготного профилей, проходящих над геометрическими центрами большого (по широте 77,5° и долготе 89,85°) и малого (по широте 50,25° и долготе 40,1°) сферических параллелепипедов

центров возмущающих тел.

Значения полей в эпицентрах тессероидов, вычисленных на сфере, и полей в эпицентрах их образов (призм), вычисленных на плоскости, коррелируют с полной массой тел. Это дает возможность сопоставить наши результаты с результатами плотностного моделирования для крупного сфероидального блока, мощностью 300 км и плотностью σ =1 г/см^3. Если отвлечься от абсолютных значений аномального поля, создаваемого большой массой, то эпицентральные относительные погрешности оказываются вполне сопоставимы. Так, например, относительная погрешность над центром массивного сфероида составляет 0,3 %. Это даже меньше наших оценок для 4-го модельного примера. Однако форма профильных кривых поправки за сферичность (разность полей над крупным массивным блоком (Старостенко и др., 1986, задача 4, рис 5б, с. 17) не согласуется с нашими построениями (см. пример 4 на рис. 11 настоящей работы).

Наблюденное гравитационное поле Δg редуцируется на поверхность земного эллипсоида. В картографической проекции Гаусса-Крюгера оно отображается на горизонтальную плоскость. В той же проекции должны быть преобразованы и геометрические параметры аномалиеобразующих объектов для корректного решения прямой задачи гравиметрии. Деформирование сфероидальных объектов при отображении поверхности эллипсоида на плоскость в меньшей степени влияет на величину расчетных аномалий в эпицентрах тел, но сказывается на латеральных градиентах и степени затухания аномального поля. Погрешность вычисления гравитационного поля на криволинейной поверхности Земли (сфере или эллипсоиде) сравнительно с плоскостью зависит от пространственных размеров (объема) области заполнения аномальных масс. При тщательно выверенном соотношении координат на сфере и плоскости, поправка за сферичность формируется только за счет различия между компонентами поля g_z и g_R. И, как показывают вычисления, для сравнительно небольших по размерам площадей эта поправка не играет заметной роли.

Заключение

Учет влияния сферичности Земли на результаты интерпретации гравиметрических данных является востребованной задачей современных методов плотностного моделирования. Определение погрешности вычисления гравитационного поля, которая вызвана заменой «сферической» модели на «плоскую», – важная часть этой задачи. На земной поверхности отображение геоцентрических сфероидальных координат в прямоугольные координаты «плоской» Земли задается конформным преобразованием Гаусса-Крюгера. В соответствующих проективных точках нормальные высоты относительно сфероидальной и плоской поверхности одинаковы.

Исходя из принципа сохранения расстояний при взаимно-однозначном отображении координат, предложен способ преобразования трехмерного каркаса плотностной моделей из сфероидальной геометрии в прямоугольную и наоборот. Показано на практических примерах, что для среднемасштабных плотностных моделей небольшой глубины (порядка десятков километров) поправка в значения поля за «сферичность» Земли не превышает 1 %.

Таким образом, для надлежащего учета поправки за кривизну земной поверхности и сопоставлении гравитационных эффектов от всех элементов плотностной модели в различных системах координат нужно обеспечить **равенство расстояний** на соответствующих поверхностях относимости и **равенство превышений** относительно плоской и сфероидальной поверхности, отсчитываемых по направлению нормалей в одних и тех же взаимно-однозначных проективных точках. Нарушение этих условий приводит к значительным искажениям геометрии объектов и необоснованному завышению погрешностей при сопоставлении полей для плоской и сфероидальной моделей.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 17-05-00916 А.

Литература

Бычков С.Г., Долгаль А.С., Симанов А.А. Вычисление аномалий силы тяжести при высокоточных гравиметрических съемках. Пермь: УрО РАН, 2015. 142 с.

Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: «Физматлит», 2000. 398 с.

Геотраверс «ГРАНИТ»: Восточно-Европейская платформа – Урал – Западная Сибирь (строение земной коры по результатам комплексных геолого-геофизических исследований) / Под ред. С.Н. Кашубина. Екатеринбург: ГУПР России по Свердловской обл. и ФГУГП «Баженовская геофизическая экспедиция», 2002. 311 с.

Голиздра Г.Я. Решение прямой задачи гравиметрии для трехмерных масс // Материалы геофизических исследований на Украине. Киев: Наукова думка, 1972. С. 54–66.

ГОСТ 32453-2013. Глобальная навигационная спутниковая система. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек. М.: Стандартинформ, 2014. 16 с.

Гравиразведка. Справочник геофизика / Под ред. Е.А. Мудрецовой, К.Е. Веселова. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Недра, 1990. 607 с.

Долгаль А.С., Симанов А.А., Хохлова В.В. Решение геокартировочных и прогнозно-поисковых геологических задач методом гравиразведки с учетом сферичности Земли // Георесурсы. 2015. Т. 2. № 4 (63). С. 56–61.

Лукавченко П.И. Гравиметрическая разведка на нефть и газ. М.: Гостоптехиздат, 1951. 336 с.

Макаров Н.П. Геодезическая гравиметрия. М.: Недра, 1968. 408 с.

Мартышко П.С., Дружинин В.С., Начапкин Н.И., Осипов В.Ю., Фёдорова Н.В., Ладовский И.В., Колмогорова В.В., Цидаев А.Г. Методика и результаты создания объемной геолого-геофизической модели верхней части литосферы северного и среднего сегментов Уральского региона // Динамика физических полей Земли. М.: ИФЗ РАН, 2011. С. 9–30.

Мартышко П.С., Ладовский И.В., Бызов Д.Д. О решении обратной задачи гравиметрии на сетках большой размерности // ДАН. 2013. Т. 450. № 6. С. 702–707.

Мартышко П.С., Ладовский И.В., Бызов Д.Д. О решении прямой задачи гравиметрии в рамках конечно-элементного подхода // Уральский геофизический вестник. 2015. № 1(25). С. 42–45.

Мартышко П.С., Ладовский И.В., Фёдорова Н.В., Бызов Д.Д., Цидаев А.Г. Теория и методы комплексной интерпретации геофизических данных. Екатеринбург: УрО РАН, 2016. 94 с.

Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Недра, 1979. 296 с.

Петровский А. П.,. Федченко Т. А, Суятинов В. Н., Быстрый алгоритм решения прямой задачи гравиметрии // Геофизический журнал. 2007. Т. 29. № 2. С. 141–145.

Пятаков Ю.В., Исаев В.Н. Методы решения прямых задач гравиметрии //Известия Томского политехнического университета. 2012. Т. 320. № 1. С. 105–110.

Сеначин В.Н., Лютая Л.М., Сеначин М.В. Некоторые вопросы гравитационного моделирования на сферической поверхности Земли // Вестник ДВО РАН.. 2015. № 2. С. 43–48.

Старостенко В.И., Манукян А.Г. Решение прямой задачи гравиметрии на шарообразной Земле // Физика Земли. 1983. № 12. С. 34–50.

Старостенко В.И., Манукян А.Г., Заворотько А.Н. Методика решения прямых задач гравиметрии и магнитометрии на шарообразных планетах. Киев: Наукова Думка, 1986. 112 с.

Хохлова В.В. Учет сферичности Земли при обработке гравиметрических данных // Геофизика. 2015. № 5. С. 59–64.

Шванк О.А., Люстих Е.Н. Интерпретация гравитационных наблюдений. Теория и практика решения прямой и обратной задачи гравиметрической разведки // М., Л.: ГНТИ нефтяной и горно-топливной литературы, 1947. 400 с.

Bouman J., Ebbing J., Meekes S., Fattah R.A., Fuchs M., Gradmann S., Haagmans R., Lieb V., Schmidt M., Dettmering D., Bosc W.

GOCE gravity gradient data for lithospheric modeling // International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation. 2015. Vol. 35A. P. 16–30.

Heck B., Seitz K. A comparison of the tesseroid, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modelling // Journal of Geodesy. 2007. № 81. P. 121–136. DOI 10.1007/s00190-006-0094-0.

Juraj Janak, Yoichi Fukuda and Peiliang Xu. Application of GOCE data for regional gravity field modeling // Earth Planets Space. 2009. 61. P. 835–843.

Karney Charles F.F. GeographicLib-1.48. 2017. URL: https://geographiclib.sourceforge.io/html/ (дата обращения: 20.04.2017).

Krüger L. Konforme Abbildung des Erdellipsoids in die Ebene // Veröff. Kgl. Preuß. Geod. Inst. N. F. 1912. 52. 181 p.

Uieda L., Barbosa V., Braitenberg C. Tesseroids: Forward-modeling gravitational fields in spherical coordinates // Geophysics. 2015. V. 81. № 5. P. f41–f48.

Wild-Pfeiffer F., Augustin W. und Heck B. Optimierung der Rechenzeit bei der Berechnung der 2. Ableitungen des Gravitationspotentials von Massenelementen // Zeitschrift für Geodäsie. 2007. № 6 (132). P. 377–384.