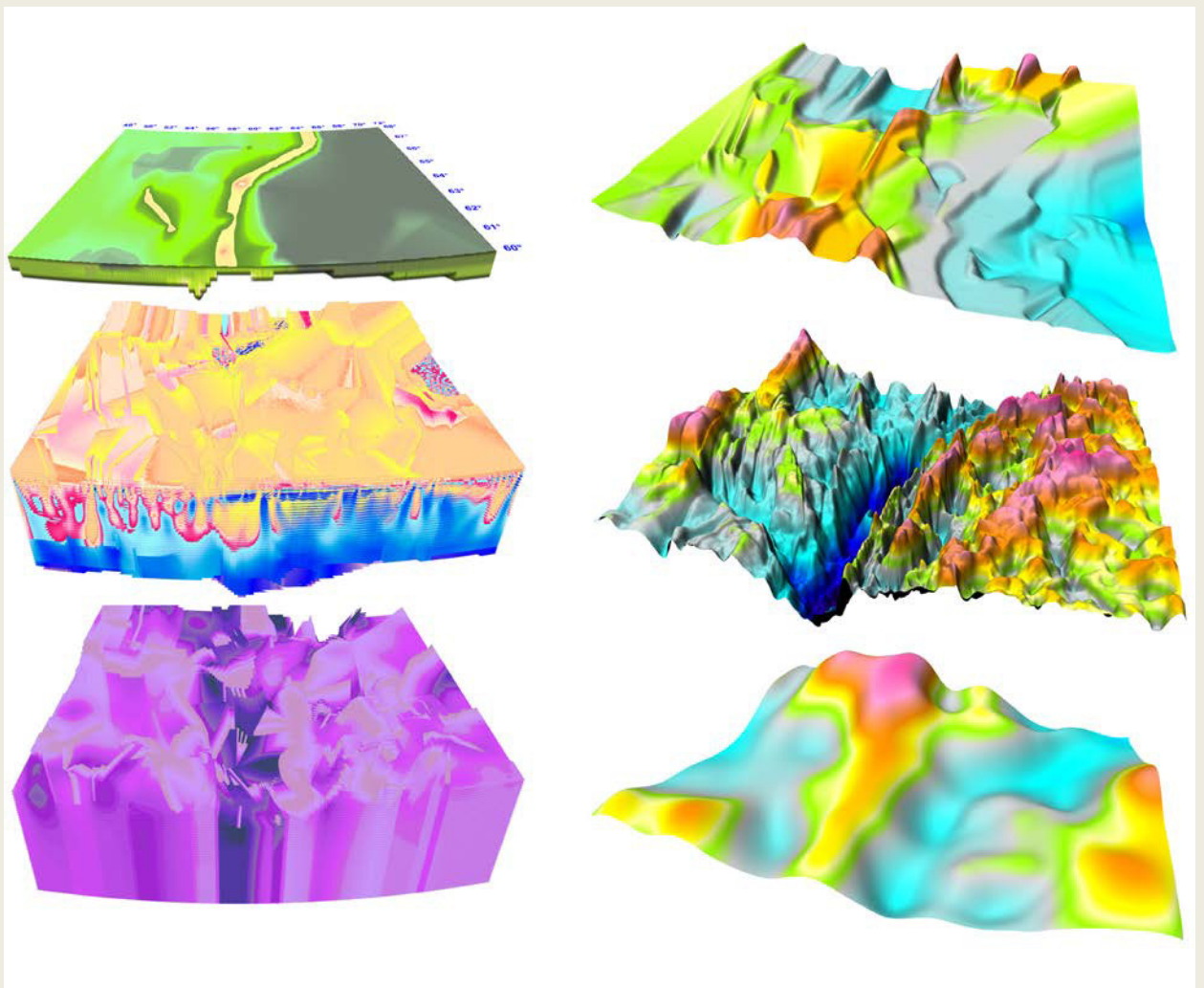


Мартышко П.С., Ладовский И.В.,  
Федорова Н.В., Бызов Д.Д., Цидаев А.Г.

# ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ КОМПЛЕКСНОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ДАННЫХ



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК • УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ ГЕОФИЗИКИ  
РОССИЙСКИЙ НАУЧНЫЙ ФОНД

Мартышко П.С., Ладовский И.В.,  
Федорова Н.В., Бызов Д.Д., Цидаев А.Г.

**ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ КОМПЛЕКСНОЙ  
ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ДАННЫХ**

ЕКАТЕРИНБУРГ  
2016

УДК 550.3:550.8:517.9  
ББК 26.2

Мартышко П.С., Ладовский И.В., Федорова Н.В., Бызов Д.Д., Цидаев А.Г.  
**Теория и методы комплексной интерпретации геофизических данных.** Екате-  
ринбург: УрО РАН, 2016. – 94 с.

Монография посвящена разработке теории и методов комплексной интерпре-  
тации геофизических данных. На основе новых сеточных алгоритмов разработан  
метод интерпретации гравитационных (и магнитных) полей: по выделенным ано-  
малиям от источников, разделённым по горизонтальным слоям, строится трехмер-  
ное распределение плотности (намагниченности) в изучаемом объёме среды в  
формате сеточных функций. Разработаны оригинальные высокоэффективные алго-  
ритмы «быстрого» решения прямой задачи гравиметрии на сетках больших раз-  
мерностей, которые применены для успешной реализации функциональных и ите-  
рационных схем решения линейных и нелинейных обратных задач. Поиск решений  
осуществляется на практически содержательных множествах корректности. Пред-  
ложена оригинальная методика послойной коррекции плотности в неоднородном  
параллелепипеде. По результатам комплексной интерпретации сейсмических, гра-  
витационных и магнитных данных созданы трехмерные модели распределения  
плотности и намагниченности верхней части литосферы и построены карты блоч-  
ного строения земной коры приарктической части Урала и сопредельных регионов.

Книга предназначена для специалистов в области геофизики, геологии, вычис-  
лительной математики и математической физики.

Ил. 52. Табл. 3. Библиогр. 100 назв.

Ответственный редактор  
член-корреспондент РАН,  
доктор физико-математических наук  
**П.С. Мартышко**

Рецензенты  
доктор геолого-минералогических наук  
**Г.В. Иголкина**  
доктор физико-математических наук  
**Е.Н. Акимова**

ISBN: 978-57691-2463-1

© Мартышко П.С., Ладовский И.В.  
Федорова Н.В., Бызов Д.Д.  
Цидаев А.Г., 2016

Интерпретация геофизических данных является важным этапом при исследовании внутреннего строения Земли и решении задач разведочной геофизики. Потенциальные геофизические поля – гравитационное, магнитное, стационарное тепловое – удовлетворяют уравнению Лапласа. Поэтому теория и методы интерпретации, разработанные для одного из этих полей, носят универсальный характер. Вместе с тем, необходимо при решении указанных выше задач использовать результаты интерпретации и других геофизических данных, прежде всего – сейсмических.

Процесс построения плотностных моделей сводится к решению прямых и обратных задач гравиметрии. Обратная задача гравиметрии (как в нелинейной – определение границы области при заданном значении плотности, – так и в линейной постановке – вычисление плотности в выделенном объеме – по известным значениям гравитационного поля) является классическим примером некорректной задачи: в общей постановке ее решение не единственно и неустойчиво зависит от исходных данных. Поэтому необходимо искать решения на практически содержательных множествах корректности, выбирая разумные модели начального приближения. При этом возникает целый ряд «попутных» задач: разделение полей от различных типов источников (как по вертикали, так и по горизонтали), выбор модельных представлений о среде (функций, описывающих границы изучаемых объемов в Земле), выбор параметризации функции, описывающей плотность, выбор плотности относимости. Аналогичные проблемы возникают и при интерпретации магнитного поля.

Геофизические и, прежде всего, сейсмические исследования показали, что геологическая среда на глубинных горизонтах имеет сложное слоисто-блоковое иерархическое строение и неоднородна как вдоль, так и вкrest простирающихся сейсмо-структурных этажей земной коры. Подобная закономерность проявляется практически на всех сейсмических профилях и фрагментах геотраверсов, суммарная протяженность которых на исследуемой площади Уральского региона и его платформенного обрамления превышает 7000 км.

Из всей совокупности доступной сейсмической информации особое место занимают первичные данные на профилях, отработанных по методике глубинного сейсмического зондирования (ГСЗ). Профильные годографы, построенные на разных базах, преобразуются в специальные двумерные поля времен. При достаточно плотной сети сейсмических наблюдений поля времен аппроксимируются кусочно-линейной непрерывной функцией, заданной на множестве координат неоднородного разреза. При численном решении обратной кинематической задачи лучевого приближения по программе «Invers» непрерывное поле времен преобразуются в скоростные матрицы дискретных сеточных функций, по которым восстанавливаются двумерные модели скоростных разрезов.

Известно, что в гравитационном поле наиболее четко проявляются аномалии от неоднородностей верхней части геологического разреза до глубины 10–15 км. Это так называемый «гравиактивный» слой. Глубинные тела, как правило, не приносят заметных искажений в градиенты поля на дневной поверхности. Однако данные сейсмических зондирований убедительно свидетельствуют о неоднородном распределении скорости не только в земной коре, но и в подстилающих её верхах мантии. И вполне вероятным плотностным аналогом скоростной модели глубинных структур будет компенсационная модель, когда аномалии гравитационного поля от толщи слоёв, залегающих ниже «гравиактивного» слоя, будут частично (или полностью) скомпенсированы. В компенсационных моделях возможна реализация плотностных распределений с нулевым (или близким к нему) значением внешнего потенциала. Подобная тенденция связана с принципиальной неоднозначностью решения обратной задачи гравиметрии, а «нулевые» (по полю) плотностные экви-



валенты могут существенно снизить или исказить достоверность результатов гравитационного моделирования.

Рельеф границ глубинных слоев явно не выделяется в суммарном поле расчетных гравитационных аномалий. Однако изменение скорости (и, соответственно, плотности) по всей глубине неоднородного разреза земной коры позволяет оценить предполагаемую область компенсации глубинных масс и по разделенным составляющим гравитационного поля уточнить детали распределения плотности в низах коры и верхней мантии.

Послойное распределение скорости в формате сеточных функций (с учетом зависимости «плотность–скорость») идеально подходит для плотностной модели начального приближения, обеспечивая устойчивость слабо единственных решений обратной задачи гравиметрии в классе слоисто-неоднородных сред. Итеративно последовательная схема вычислений корректирующих добавок по горизонтальным слоям не только обеспечивает единственность решения обратной задачи гравиметрии, но и сохраняет геологическую содержательность исходной скоростной модели, построенную по сейсмогеологическим данным.

В настоящей работе изложены методы комплексной интерпретации сейсмических, гравитационных и магнитных данных и их применение для построения трехмерных моделей земной коры и верхней мантии.

*Основные этапы предлагаемых методов:*

1. Построение скоростных разрезов земной коры.
2. Уточнение коэффициентов регрессионной зависимости «скорость–плотность» по результатам 2D гравитационного моделирования для данного региона.
3. Определение плотностей мантийных блоков из условия изостатической компенсации.
4. Построение 3D модели нулевого приближения по интерполированным между профилями значениям плотности.
5. Прямая задача гравиметрии для модели нулевого приближения. Расчет разности наблюдаемого и модельного полей.
6. Фильтрация разностного гравитационного поля и его разделение по горизонтальным слоям модельного куба.
7. Послойный подбор значений плотности методом локальных поправок с адаптивной регуляризацией.
8. Построение результирующей 3D модели подобранных значений плотности, составление структурных карт и карт-схем глубинных срезов (с учетом интерпретации магнитных данных).

Для реализации этих этапов разработаны оригинальные алгоритмы и программы пере­счёта потенциальных полей вверх и вниз, учета влияния боковых источников, решения нелинейной (структурной) обратной задачи, решения линейной трехмерной обратной задачи, определены коэффициенты в формулах зависимости «плотность–скорость» для ряда геотраверсов.

## ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

### 1.1. Сглаживание потенциальных полей по формуле Пуассона (выделение поля от слоя)

Как правило, из априорных данных известно, что исследуемые аномалии геологических структур залегают на определенной глубине под земной поверхностью (такими априорными данными становятся, например, данные, полученные при интерпретации данных сейсморазведки). Разделение аномалий наблюдаемого гравитационного поля по глубине и их ассоциированная связь с глубинными объектами образует стержень интерпретационных схем задач гравитационного моделирования [Маловичко, 1956]. Классический способ разделения полей включает спектральную фильтрацию с последующим аналитическим продолжением разделенных аномалий [Сербуленко, 1966]. Одна из удачных реализаций – система «VECTOR» послойного векторного сканирования аномалий гравитационного поля [Простолупов и др., 2006; Бычков, 2010]. Фильтрация поля путем повысотных трансформаций обеспечила существенное продвижение вперед в вопросах разделения разноглубинных аномалий.

Для разделения аномалий наблюдаемого поля по глубине использована оригинальная методика повысотной трансформации [Мартышко, Пруткин, 2003; Мартышко и др., 2014б].

На начальном этапе решается задача о выделении эффекта источников в слое от земной поверхности до некоторой глубины  $H$ . Поле продолжается вверх на уровень  $-H$ , при этом влияние локальных приповерхностных источников (до глубины  $H$ ) если и не устраняется совсем, то значительно ослабевает.

Пересчет поля вверх производится по формуле Пуассона

$$u(x', y', -H) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2)^{3/2}} u(x, y, 0) dx dy \quad (1.1)$$

дающей решение краевой задачи Дирихле  $\Delta u = 0, z > 0,$   
 $u = u(x, y, 0), z = 0$  для полупространства.

Можно привести оценку уменьшения поля от источников при пересчете по формуле (1.1). Рассмотрим изменение максимума аномального поля от одиночного шара радиуса  $r$  с избыточной плотностью  $\Delta\sigma$ , центр которого залегает на глубине  $H$ , при пересчете поля на высоту  $\Delta H$  ( $f$  – гравитационная постоянная):

$$k = f \frac{4\pi r^3 \Delta\sigma}{3H^2} : f \frac{4\pi r^3 \Delta\sigma}{3(H + \Delta H)^2},$$

откуда при  $\Delta H = 2H$   $k = 9$  (т. е. поле уменьшится в 9 раз) [Мартышко, Кокшаров, 2005].

Однако оценки такого вида справедливы лишь для объектов, имеющих небольшую протяженность в горизонтальном направлении. Легко построить пример, показывающий, что для объектов, расположенных над слоем, поле от которого требуется вычислить,

ослабление поля при пересчете будет значительно меньше. Действительно, для сфероидов гравитационный эффект представляется формулой [Голов, Сизиков, 2005], легко получаемой непосредственным интегрированием по эллипсоиду с последующим вычислением производной  $dV/dz$ :

$$\Delta g(x, y) = 4\pi\gamma\Delta\sigma \frac{c}{ae^3} (p - \arctg p) z_0,$$

$$p = \frac{q}{\sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - q^2 + \sqrt{(1 - q^2)^2 + \left( \frac{2qz_0}{r} \right)^2} \right)}},$$

$$q = \frac{ea}{r}, \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2},$$

где  $\gamma$  – гравитационная постоянная;  $e = [1 - (c/a)^2]^{1/2}$  – эксцентриситет;  $\Delta\sigma$  – избыточная плотность;  $(x_0, y_0, z_0)$  – координаты центра сфероида;  $a = b$  – горизонтальные;  $c$  – вертикальная полуось сфероида, причем  $a < c$ .

Если теперь рассмотреть модель (рис. 1.1), в которой сфероид с параметрами сжатия  $\varepsilon = c/a$  ( $\varepsilon = 1$  – шар) расположен в слое толщины  $4c$ , так, что его центр находится на глубине  $2c$  (в середине слоя), и найти зависимость ослабления поля при пересчете на высоту  $4c$  (толщину слоя) от  $\varepsilon = c/a$ , то получится следующий график (рис. 1.2).

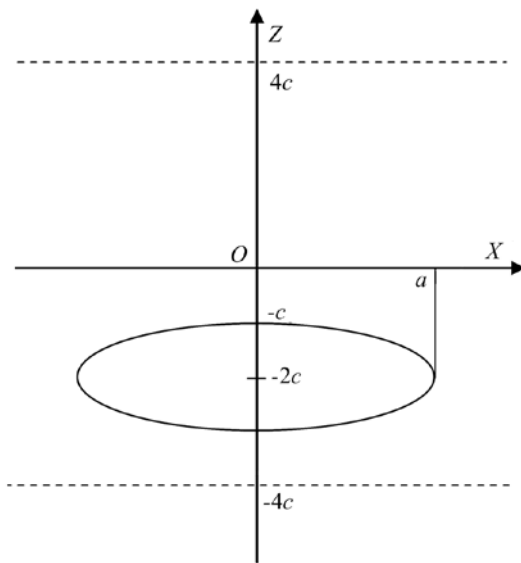


Рис. 1.1. Вертикальное сечение сфероида плоскостью  $xOz$

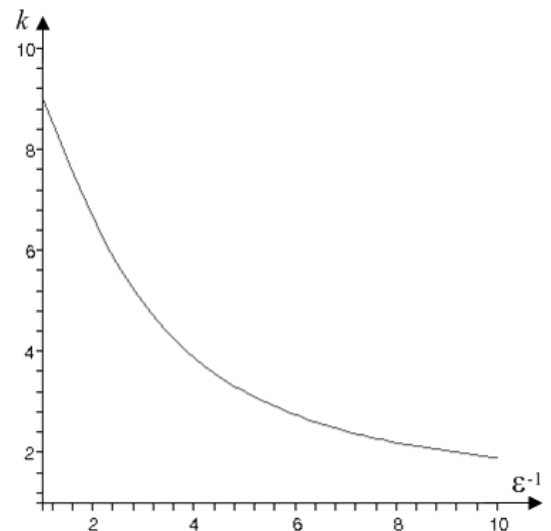


Рис. 1.2. График зависимости отношения заданного поля к пересчитанному от параметра сжатия сфероида

Из графика (см. рис. 1.2) хорошо видно, что уже при  $\varepsilon^{-1} = 3$  ослабление принимает величину порядка 5 (что еще допустимо), а при  $\varepsilon^{-1} = 8$  приблизительно равно 2, что практически неотличимо от «нормального» поля «глубоких» источников. Это означает, что поля вытянутых в горизонтальном направлении объектов вносят существенный вклад в пересчитанное поле. Для исключения их влияния используется подбор наблюдаемого поля сингулярными источниками.

## Обратная задача для послойного разделения полей

Локальная составляющая аномалий гравитационного поля обрисовывает плановое расположение источников (в проекции на дневную поверхность) в пределах выбранного участка исследований. Некоторое представление о пространственном положении аномалиеобразующих объектов можно получить по аномалиям наблюдаемого поля, отфильтрованным по параметру полуширины. Пересчет поля на несколько высот с последующим аналитическим продолжением на соответствующие глубины позволяет выделить из суммарного поля составляющие различных «длин волн» и соотнести их с аномалиями от неоднородностей на нижележащих горизонтах. Вычисление поля в верхнем полупространстве, т. е. вне области нижележащих масс выполняется по интегральной формуле Пуассона. Пересчет вниз через массы неоднородного слоя – опирается на решение обратной задачи аналитического продолжения потенциальных полей. Для разделения полей по глубине и локализации источников аномальных масс в горизонтальном слое разработана технология последовательных аналитических пересчетов на несколько высот и глубин. [Мартышко, Цидаев, 2008; Мартышко, Пруткин, 2003]. Фильтр повысотных трансформант – это разность последовательно пересчитанных полей между двумя указанными глубинами.

Предположим, что гравитирующие массы расположены в слое ниже горизонтальной плоскости  $z = H > 0$ . На этой глубине гравитационное поле обозначим через  $U_g(x', y', H)$  и примем его в качестве граничной функции задачи Дирихле для полупространства. По значениям на границе решение задачи Дирихле восстанавливает гармоническую функцию поля всюду выше плоскости  $z = H$ . Так для точек верхнего полупространства  $z = \zeta < 0$  решение для  $U_g(x', y', \zeta)$  можно записать через интеграл Пуассона

$$U_g(x', y', \zeta) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty} \frac{H + |\zeta|}{\left[ (x - x')^2 + (y - y')^2 + (H + |\zeta|)^2 \right]^{3/2}} U_g(x, y, H) dx dy. \quad (1.2)$$

В частности, если плоскость  $z = H = 0$  находится на уровне дневной поверхности, из (1.2) получаем стандартную формулу решения задачи Дирихле для верхнего полупространства [Гравиразведка ... , 1990]

$$U_g(x', y', \zeta) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty} \frac{|\zeta|}{\left[ (x - x')^2 + (y - y')^2 + (\zeta)^2 \right]^{3/2}} U_g(x, y, 0) dx dy. \quad (1.3)$$

Формулы (1.2) и (1.3), в совокупности, задают постановку прямой и обратной задач для выделения составляющих поля выше и ниже глубины  $H$ . Пересчет поля на высоту  $\zeta < 0$  выполняется по интегральной формуле прямой задачи (1.3). Аналитическое продолжение пересчитанного поля вниз, на глубину  $H > 0$  находится из решения интегрального уравнения Фредгольма (1.2) относительно неизвестной функции  $U_g(x', y', H)$ . В общем случае, обратная задача аналитического продолжения относится к классу некорректно поставленных задач и для ее решения требуется обязательная регуляризация. Затем аналитическая часть продолженного поля вновь пересчитывается на уровень дневной поверхности  $\zeta = 0$  по интегральной формуле (1.2). Таким образом, если аналитическая часть общего поля порождается слоем источников ниже глубины  $H$ , то оставшаяся часть поля будет связана исключительно с источниками верхнего слоя.

Фильтр (1.2)–(1.3) разделения пересчитанных полей работает по следующему принципу. Пусть  $U_g(x', y', 0) = U_g(0)$  – значения аномалий наблюдаемого поля на уровне поверх-

ности  $z = 0$ ;  $U_g(x', y', \zeta) = U_g(\zeta)$  – значение продолженного поля на высоту  $z = \xi < 0$ . В пересчитанном на высоту, достаточно сглаженном поле влияние локальных приповерхностных источников заметно ослабевает. И, практически, их можно не учитывать. Поля от протяженных, сопоставимых по морфологии рельефа плотностных границ разделить гораздо сложнее.

Допустим, что интересующий нас  $k$ -ый плоский слой ограничен сверху и снизу двумя плоскостями  $z = H_1^k$  и  $z = H_2^k$ . Поле  $U_g(\zeta_k)$  с выбранной высоты  $\zeta_k$  [Мартышко и др., 2010] аналитически продолжается вниз до этих глубин и восстанавливается на уровень дневной поверхности. Цепочка трансформаций

$$U_g(0) \rightarrow U_g(\zeta_k) \rightarrow \begin{cases} U_g^1(H_1^k) \rightarrow U_g^1(0) \\ U_g^2(H_2^k) \rightarrow U_g^2(0) \end{cases} \quad (1.4)$$

отфильтровывает локальные аномалии от приповерхностных слоев выше глубин  $H_1$  и  $H_2$ . Поле от слоя  $H_2 - H_1$  вычисляется как разность повысотных трансформант (1.4) на двух уровнях

$$\Delta U = U_g^1 - U_g^2. \quad (1.5)$$

Для небольших высот пересчета длинноволновая составляющая поля протяженных источников меняется незначительно. В разностном поле на двух высотах она практически исчезает (или существенно ослабляется). Поэтому поле (1.5), вычисленное по разности двух повысотных трансформант, принимается за поле от слоя  $H_2 - H_1$ , свободное от влияния выше и ниже лежащих источников.

### **Математический аппарат инверсии оператора Фредгольма, используемый для трансформаций полей**

Введём декартову прямоугольную систему координат с осью  $Z$ , направленной вниз, плоскость  $XOY$  совпадает с дневной поверхностью. Пересчет измеренного на площади  $D = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  земной поверхности поля  $U(x, y, z)|_{z=0}$  вверх на уровень  $z = -H$  реализуется по формуле Пуассона

$$U(x, y, -H) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2]^{3/2}} U(x', y', 0) dx' dy'. \quad (1.6)$$

Для пересчета поля вниз на глубину  $z = H$  и нахождения значений  $\bar{U}(x, y, H)$  решается уравнение Фредгольма первого рода

$$Ku \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2H}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + 4H^2]^{3/2}} u(x', y', 0) dx' dy' = \bar{U}(x, y, H). \quad (1.7)$$

Уравнение 1-го рода (1.7) представляет собой некорректную задачу, поэтому необходимо при его решении использовать методы регуляризации. Оператор уравнения является положительно определенным и самосопряженным, поэтому можно применять схему М.М. Лаврентьева [Лаврентьев, 1962].

После дискретизации на сетке уравнения (1.7) и аппроксимации интегрального оператора по квадратурным формулам, задача сводится к решению системы линейных алгебра-

ических уравнений (СЛАУ) с симметричной матрицей  $K$ . В регуляризованном виде система имеет вид:

$$(K + \alpha I)u = \bar{U}, \quad (1.8)$$

где  $I$  – единичный оператор,  $\alpha$  – параметр регуляризации.

Для решения СЛАУ могут быть использованы итерационные методы градиентного типа:

1) итеративно регуляризованный метод простой итерации

$$u^{k+1} = u^k - \frac{1}{\lambda_{\max}} [(K + \alpha I)u^k - \bar{U}], \quad (1.9)$$

где  $\lambda_{\max}$  – максимальное собственное значение матрицы  $K + \alpha I$  (симметричный случай);

2) метод минимальных невязок

$$u^{k+1} = u^k - \frac{(K(Ku^k - \bar{U}), Ku^k - \bar{U})}{\|K(Ku^k - \bar{U})\|^2} (Ku^k - \bar{U}); \quad (1.10)$$

3) метод минимальной ошибки

$$u^{k+1} = u^k - \frac{\|Ku^k - \bar{U}\|^2}{\|K^T(Ku^k - \bar{U})\|^2} K^T(Ku^k - \bar{U}); \quad (1.11)$$

4) метод наискорейшего спуска

$$u^{k+1} = u^k - \frac{\|K^T(Ku^k - \bar{U})\|^2}{\|KK^T(Ku^k - \bar{U})\|^2} K^T(Ku^k - \bar{U}) \quad (1.12)$$

Заметим, что для методов (1.10)–(1.12) в регуляризованном варианте матрица  $K$  заменяется на  $K + \alpha I$ .

Условием останова итерационных процессов (1.9)–(1.12) является выполнение условия

$$\frac{\|Ku^k - \bar{U}\|}{\|\bar{U}\|} < \varepsilon \text{ при достаточно малом } \varepsilon.$$

Эти методы успешно применяются на многопроцессорных вычислительных системах различного типа при решении обратной задачи аналитического продолжения потенциальных полей гравиметрии и магнитометрии, для восстановления поверхности раздела между слоями и плотности в слое. Программная реализация этих методов проводилась на многопроцессорном комплексе МВС-1000/32 с применением параллельных вычислений.

Ниже будет показано, как разработанные алгоритмы применяются для составления по-слойных карт гравитационного и магнитного полей.

## 1.2. Линейная обратная задача гравиметрии на сетках большой размерности (определение плотности по заданному полю)

Для решения задач детального плотностного моделирования необходимо разработать новые компьютерные технологии двух- и трехмерного плотностного моделирования, применимые для обработки числовых массивов большой размерности.

Корректное решение трехмерной задачи гравитационного моделирования зависит от способа продолжения масс за боковые грани плотностного куба и выбора закона распределения фоновой плотности «нормальной» модели. В настоящей работе в качестве таковой для плоского слоя принимается плотность, зависящая только от глубины. Ее можно получить, усредняя сеточные функции интерполированной плотности по каждому слою «цифрового куба». Такую плотность условно можно назвать «гидростатической». Для каждого гипсометрического уровня  $z_k$  по плотностной матрице  $\rho(x_i, y_j, z_k)$  вычисляются значения средних  $\rho_0^k$ . Полученная совокупность средних  $\rho_0^k$  приравнивается к распределению зависящей только от глубины плотности  $\rho_0(z)$ , которая и принимается за плотность относимости «нормальной модели» [Ладовский и др., 2013; Мартышко и др., 2016].

**1.2.1. Прямая задача гравиметрии для сеточной функции плотности (вычисление значений поля по заданному распределению плотности). Быстрый алгоритм.** Пусть область  $D$ , заполненная массами с плотностью  $\rho(x, y, z)$ , представляет собой прямоугольный параллелепипед:

$$D = [x_{\min}; x_{\max}) \times [y_{\min}; y_{\max}) \times [z_{\min}; z_{\max}).$$

Точка  $\vec{r} = (x, y, z) \in D$ ;  $\vec{q} = (\xi, \eta, \zeta) \notin D$  – точка, в которой вычисляется поле;

$$R = |\vec{r} - \vec{q}|.$$

Вертикальная компонента гравитационного поля в точке  $\vec{q}$  вычисляется по формуле ( $f$  – гравитационная постоянная;  $S$  – линейный оператор):

$$g(\vec{q}) = S\rho = f \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_D \frac{\rho(\vec{r})}{R} dx dy dz. \quad (1.13)$$

Воспользуемся грид-аппроксимацией функции  $\rho(x, y, z)$  плотностного параллелепипеда. На трехмерной сетке  $\{x_i, y_j, z_k\}$  ( $i \in \overline{0, N_x}; j \in \overline{0, N_y}; k \in \overline{0, N_z}$ ,  $x_i < x_{i+1}$ ,  $y_j < y_{j+1}$ ,  $z_k < z_{k+1}$ ,  $x_0 = x_{\min}$ ,  $x_{N_x} = x_{\max}$ ,  $y_0 = y_{\min}$ ,  $y_{N_y} = y_{\max}$ ,  $z_0 = z_{\min}$ ,  $z_{N_z} = z_{\max}$ ) построим элементы  $D_{i,j}^k$

$$D = \bigcup_{i,j,k} D_{i,j}^k; \quad i \in \overline{0, N_x - 1}; j \in \overline{0, N_y - 1}; k \in \overline{0, N_z - 1}.$$

$$D_{i,j}^k = [x_i; x_{i+1}) \times [y_j; y_{j+1}) \times [z_k; z_{k+1})$$

так, чтобы в пределах каждого из них плотность была постоянной:

$$\rho(x, y, z) = \rho_{i,j}^k, (x, y, z) \in D_{i,j}^k. \quad (1.14)$$

С учетом (1.14), интеграл (1.13) заменяется суммой  $N = N_x N_y N_z$  кубатурных элементов с постоянной плотностью:

$$g(\vec{q}) = -f \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \sum_{k=0}^{N_z-1} \rho_{i,j}^k \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{1}{R} \Big|_{z_k}^{z_{k+1}} dx dy. \quad (1.15)$$

Для того чтобы упростить вычисление вертикальной компоненты гравитационного поля, мы выполнили следующие преобразования формулы (1.15). Обозначим через  $R_k$  расстояние от точки наблюдения  $(\xi, \eta, \zeta)$  до переменной точки интегрирования  $(x, y, z_k)$  на глубине  $z_k$ :

$$R_k = R \Big|_{z=z_k} = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z_k)^2}.$$

Объединяя в (1.15) слагаемые с одинаковыми индексами  $k$  обратных расстояний, получаем:

$$g(\vec{q}) = f \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \sum_{k=0}^{N_z} \Delta \rho_{i,j}^k S_{i,j}^k; \quad (1.16)$$

где  $\Delta \rho_{i,j}^k$  – поэлементная разность плотностей  $k$  и  $k-1$  горизонтальных слоев:

$$\Delta \rho_{i,j}^k = \rho_{i,j}^k - \rho_{i,j}^{k-1}, (k \in \overline{1, N_z - 1}) \text{ и } \Delta \rho_{i,j}^0 = \rho_{i,j}^0, \Delta \rho_{i,j}^{N_z} = -\rho_{i,j}^{N_z-1};$$

$$\begin{aligned} S_{i,j}^k(\xi, \eta, \zeta) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{1}{R_k} dx dy = \\ &= \left( (x - \xi) \ln(y - \eta + R_k) + (y - \eta) \ln(x - \xi + R_k) - \right. \\ &\quad \left. - (z_k - \zeta) \operatorname{arctg} \left( \frac{(x - \xi)(y - \eta)}{(z_k - \zeta) R_k} \right) \right) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \Big|_{y_j}^{y_{j+1}}; \end{aligned} \quad (1.17)$$

$S_{i,j}^k$  – потенциал горизонтальной грани ячейки  $(i, j, k)$  или  $(i, j, k-1)$  на глубине  $z_k$  с единичной плотностью [Старостенко, 1978; Гравиразведка ... , 1990].

Представление решения в форме (1.16)–(1.17) дает возможность оптимизировать алгоритм вычислений поля для слоя, расположенного между произвольными отметками глубин [Мартышко и др., 2013; 2015]. Формулу (1.15) запишем в виде:

$$g(\vec{q}) = f \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \sum_{k=0}^{N_z-1} \rho_{i,j}^k G_{i,j}^k(\vec{q}), \quad (1.18)$$

где  $G_{i,j}^k(\vec{q})$  – поле в точке  $\vec{q}$  с точностью до коэффициента  $\gamma$  параллелепипеда  $D_{i,j}^k$  с единичной плотностью, которое вычисляется по формуле [Гравиразведка ... , 1990] (подстановка производится в  $\vec{r}$ ):



$$G_{i,j}^k(\vec{q}) = -v(\vec{r} - \vec{q}) \begin{vmatrix} x_{i+1} & y_{j+1} & z_{k+1} \\ x_i & y_j & z_k \end{vmatrix}, \quad (1.19)$$

$$v(\vec{a}) = a_x \ln(a_y + |\vec{a}|) + a_y \ln(a_x + |\vec{a}|) - a_z \arctg\left(\frac{a_x a_y}{a_z |\vec{a}|}\right).$$

Обозначим  $\vec{r}_{i,j}^k = (x_i, y_j, z_k)$  и раскроем в (1.18)  $G_{i,j}^k(\vec{q})$  по формуле (1.19):

$$g(\vec{q}) = -f \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \sum_{k=0}^{N_z-1} \rho_{i,j}^k (v(\vec{r}_{i+1,j+1}^{k+1} - \vec{q}) - v(\vec{r}_{i,j+1}^{k+1} - \vec{q}) - v(\vec{r}_{i+1,j}^{k+1} - \vec{q}) + v(\vec{r}_{i,j}^{k+1} - \vec{q}) - v(\vec{r}_{i+1,j+1}^k - \vec{q}) + v(\vec{r}_{i,j+1}^k - \vec{q}) + v(\vec{r}_{i+1,j}^k - \vec{q}) - v(\vec{r}_{i,j}^k - \vec{q})). \quad (1.20)$$

Теперь объединим слагаемые с одинаковыми индексами при  $\vec{r}_{i,j}^k$ :

$$g(\vec{q}) = -f \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \sum_{k=0}^{N_z} v(\vec{r}_{i,j}^k - \vec{q}) (\rho_{i-1,j-1}^{k-1} - \rho_{i-1,j}^{k-1} - \rho_{i,j-1}^{k-1} + \rho_{i,j}^{k-1} - \rho_{i-1,j-1}^k + \rho_{i-1,j}^k + \rho_{i,j-1}^k - \rho_{i,j}^k) = f \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \sum_{k=0}^{N_z} \bar{\rho}_{i,j}^k v(\vec{r}_{i,j}^k - \vec{q}), \quad (1.21)$$

считаем, что  $\rho_{i,j}^k = 0$ , если  $i = -1 \vee i = N_x \vee j = -1 \vee j = N_y \vee k = -1 \vee k = N_z$ .

При использовании формулы (1.20) необходимо  $8N$  раз вычислить значение функции  $v$ , при использовании формулы (1.21) – только  $(N_x + 1)(N_y + 1)(N_z + 1)$  раз, что дает почти восьмикратное уменьшение времени счета для достаточно больших  $N$ .

Пусть  $D_{i,j}^k$  – равновеликие параллелепипеды, т. е.  $x_i = x_0 + i\Delta x$ ,  $y_j = y_0 + j\Delta y$ ,  $z_k = z_0 + k\Delta z$ ,  $\Delta x > 0$ ,  $\Delta y > 0$ ,  $\Delta z > 0$ . Выпишем формулу для вычисления множества  $\vec{T}$  значений  $g$  в точках множества  $\vec{r}$  в узлах равномерной прямоугольной двумерной сетки, ориентированной аналогично  $D$ , расположенной в плоскости, параллельной грани  $D$ , с расстояниями между узлами по двум измерениям  $\Delta x$  и  $\Delta y$ .

$\vec{r} = (\vec{q}_m)_{m=0}^{M-1}$ ,  $\vec{q}_m = (\xi_{i_1}, \eta_{j_1}, \zeta)$ ,  $\xi_{i_1} = \xi_0 + i_1\Delta x$ ,  $\eta_{j_1} = \eta_0 + j_1\Delta y$ ,  $\zeta \notin (z_{\min}; z_{\max})$ ,  $i_1 \in \overline{0, M_x - 1}$ ,  $j_1 \in \overline{0, M_y - 1}$ ,  $m = i_1 + M_x j_1$ ,  $M = M_x M_y$ .

$$\vec{T} = (g(\vec{q}_m))_{m=0}^{M-1} = f \left( \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \sum_{k=0}^{N_z-1} \rho_{i,j}^k G_{i,j}^k(\vec{q}_m) \right)_{m=0}^{M-1}. \quad (1.22)$$

Для расчета  $\vec{T}$  по формуле (1.22) требуется  $8MN$  раз вычислить значение  $v$ . Применим оптимизацию (1.21):

$$\vec{T} = f \left( \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \sum_{k=0}^{N_z} \bar{\rho}_{i,j}^k v(\vec{r}_{i,j}^k - \vec{q}_m) \right)_{m=0}^{M-1}. \quad (1.23)$$

По данной формуле  $\mathbf{v}$  нужно вычислять уже  $M(N_x + 1)(N_y + 1)(N_z + 1)$  раз. Однако при указанном  $\vec{r}$  среди множества векторов  $\vec{r}_{i,j}^k - \vec{q}_m$  есть большое количество совпадений, для которых  $\mathbf{v}$  можно считать один раз:

$$\vec{r}_{i,j}^k - \vec{q}_m = (x_0 + i\Delta x - (\xi_0 + i_1\Delta x), y_0 + j\Delta y - (\eta_0 + j_1\Delta y), z_k - \zeta) = (x_0 - \xi_0 + (i - i_1)\Delta x, y_0 - \eta_0 + (j - j_1)\Delta y, z_k - \zeta).$$

Если ввести новые индексы  $i_2 = i - i_1$ ,  $i_2 \in \overline{1 - M_x, N_x}$ ,  $j_2 = j - j_1$ ,  $j_2 \in \overline{1 - M_y, N_y}$  и обозначить  $v_{i_2, j_2}^k = v(x_0 - \xi_0 + i_2\Delta x, y_0 - \eta_0 + j_2\Delta y, z_k - \zeta)$ , то (1.23) можно переписать в виде:

$$\vec{T} = f \sum_{k=0}^{N_z} \left( \sum_{i_2=-i_1}^{N_x-i_1} \sum_{j_2=-j_1}^{N_y-j_1} \bar{p}_{i_1+i_2, j_1+j_2}^k v_{i_2, j_2}^k \right)_{m=0}^{M-1}. \quad (1.24)$$

Таким образом,  $\mathbf{v}$  необходимо вычислять лишь в  $(N_x + M_x)(N_y + M_y)(N_z + 1)$  точках, что на два порядка меньше, чем по формулам (1.22) или (1.23). Следует отметить, что возможна программная реализация (1.24), при которой не нужно хранить множество  $\{v_{i_2, j_2}^k | i_2 \in \overline{1 - M_x, N_x}, j_2 \in \overline{1 - M_y, N_y}, k \in \overline{0, N_z}\}$ , если использовать его элементы в соответствующих слагаемых суммы по мере вычисления. Это экономит память и никак не сказывается на производительности.

Предложенный способ решения прямой задачи, по сравнению с предложением А.П. Петровского [Петровский и др., 2007], обладает двумя преимуществами: 1) не требуется симметрия множества  $\vec{r}$  относительно разбиения  $D$  (т. е. не требуется условий  $x_0 - \xi_0 = \frac{\Delta x}{2} l_x$ ,  $y_0 - \eta_0 = \frac{\Delta y}{2} l_y$ ,  $l_x \in \mathbb{Z}$ ,  $l_y \in \mathbb{Z}$ ,  $N_x = M_x$ ,  $N_y = M_y$ ); 2) (1.24) быстрее, как минимум, в 2 раза (как показывает практика, чем больше  $N$ , тем быстрее), т. к. у А.П. Петровского с соавторами на первом шаге вычисляется множество  $\{G_{0,0}^k(\xi_{i_1}, \eta_{j_1}, \zeta) | i_1 \in \overline{0, N_x - 1}, j_1 \in \overline{0, N_y - 1}, k \in \overline{0, N_z - 1}\}$  (при указанных в пункте 1 условиях), это требует  $8N_x N_y N_z$  вычислений значений  $\mathbf{v}$ , тогда как в (1.24) при тех же условиях – только  $4N_x N_y (N_z + 1)$ .

Для оценки ускорения расчетов по формуле (1.24) по сравнению с формулой (1.22) проведена серия вычислений поля от трехмерной плотностной грид-модели с различным числом элементов ее разбиения и детализацией сетки поля. Параметры разбиений и время счета приведены в табл. 1.1. Вычисления проводились на одном ядре процессора Intel Xeon E5-2620 с тактовой частотой 2,5 ГГц. На рис. 1.3 и 1.4 представлены соответствующие графики.

Таблица 1.1

**Зависимость времени счета от параметров разбиения модели и сетки вычисления поля**

$N_x \times N_y \times N_z$	$N = N_x \times N_y \times N_z$	Время счета по формуле (1.22), с	Время счета по формуле (1.24), с
50×50×50	125000	227	10
75×75×75	421875	1725	36
100×100×100	1000000	7269	84
125×125×125	1953125	22183	165
150×150×150	3375000	55197	284
175×175×175	5359375	119304	451
200×200×200	8000000	232602	673
250×250×250	15625000	709844	1313

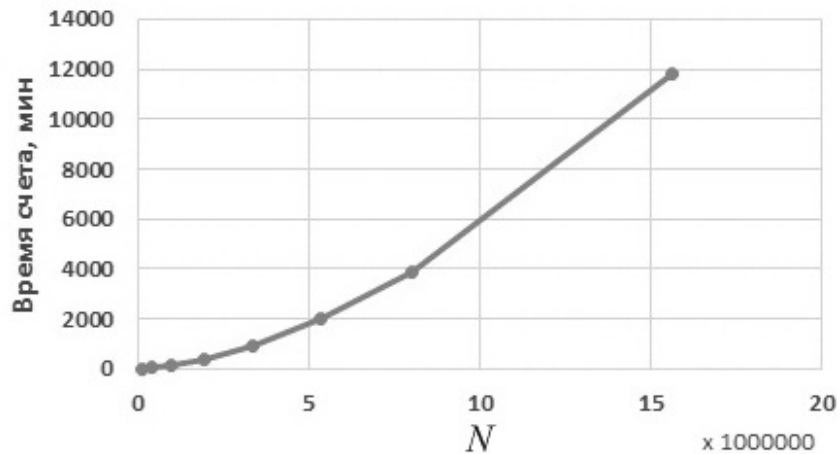


Рис. 1.3. Зависимость времени счета поля по формуле (1.22) от числа элементов разбиения модели

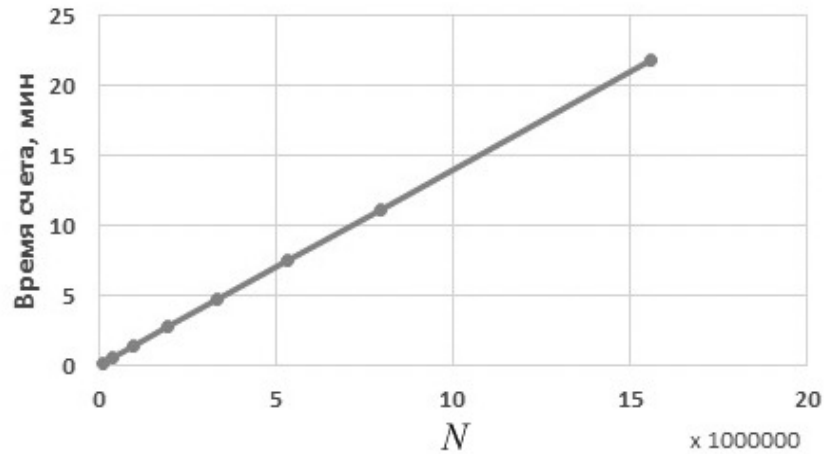


Рис. 1.4. Зависимость времени счета поля по формуле (1.24) от числа элементов разбиения модели

**1.2.2. Обратная задача гравиметрии для модели слоистых сред (вычисление плотности по известным значениям поля). Итерационный процесс в общем виде.** Плотность неоднородного параллелепипеда вертикальной мощности  $H$  будем искать в виде произведения зависящей только от глубины функции  $\rho_0(z)$  и функции  $\Phi(x, y)$  [Мартышко, Кокшаров, 2005]:

$$\rho(x, y, z) = \rho_0(z)\Phi(x, y).$$

При этом  $\rho_0(z)$  считаем известной, скажем, исходя из данных каротажа по скважинам или из соответствующей зависимости для модели нулевого приближения.  $\Phi(x, y)$  определяется из интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода:

$$g(\xi, \eta, \zeta) = f \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \Phi(x, y) K(x, y, \xi, \eta, \zeta) dx dy, \quad (1.25)$$

$$K(x, y, \xi, \eta, \zeta) = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \frac{(z - \zeta)\rho_0(z)}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2)^{3/2}} dz,$$

где  $f$  – гравитационная постоянная;  $g(\xi, \eta, \zeta)$  – наблюдаемое гравитационное поле;  $[x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}] \times [z_{\min}, z_{\max}]$  – область интегрирования (границы плотностного параллелепипеда).

Таким образом, задача вычисления корректирующей добавки в одном слое сводится к двумерному случаю и может решаться независимо от других слоев. Это обеспечивает единственность решения уравнения для латеральной плотности [Новоселицкий, 1965] и, как следствие, всей задачи на основе устойчивого алгоритма.

Численное решение обратной задачи гравиметрии в формате сеточных функций находится на основе идеи локализации [Мартышко и др., 2010; 2013; Пруткин, 1986]. Этот подход позволяет решать обратную задачу без нелинейной минимизации (т. е. существенно сократить время вычислений). Авторами построен для уравнения (1.25) соответствующий итерационный алгоритм для нахождения значений  $\Phi(x, y)$ , минимизирующий невязку  $\|\delta g\|$  наблюдаемого  $g(\xi, \eta, \zeta)$  и модельного  $U(\xi, \eta, \zeta)$  полей. Сначала считаем поле  $U^{(0)}(\xi, \eta, \zeta)$  от модели начального приближения и «остаточное» поле  $\delta g^{(0)} = g - U^{(0)}$ , принимаем  $\Phi^{(0)} \equiv 0$ ,  $\zeta = \text{const}$ ,  $\zeta \notin (z_{\min}, z_{\max})$ ,  $(\xi, \eta) \in [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$ . Далее циклически повторяем следующие шаги (записано для итерации  $\theta \geq 1$ ):

1) Вычисляем

$$\delta U^{(\theta)}(\xi, \eta) = f \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \delta g^{(\theta-1)}(x, y, \zeta) K(x, y, \xi, \eta, \zeta) dx dy.$$

2) Считаем  $\alpha^{(\theta)}$  и  $\beta^{(\theta)}$ :

$$\alpha^{(\theta)} = \frac{1}{Q^{(\theta)}} (\langle S, S \rangle \langle \delta g^{(\theta-1)}, \delta U^{(\theta)} \rangle - \langle S, \delta U^{(\theta)} \rangle \langle \delta g^{(\theta-1)}, S \rangle);$$

$$\beta^{(\theta)} = \frac{1}{Q^{(\theta)}} (\langle \delta U^{(\theta)}, \delta U^{(\theta)} \rangle \langle \delta g^{(\theta-1)}, S \rangle - \langle S, \delta U^{(\theta)} \rangle \langle \delta g^{(\theta-1)}, \delta U^{(\theta)} \rangle);$$

$$Q^{(\theta)} = \langle \delta U^{(\theta)}, \delta U^{(\theta)} \rangle \langle S, S \rangle - \langle S, \delta U^{(\theta)} \rangle^2,$$

где  $\langle h_1, h_2 \rangle = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} h_1(x, y) h_2(x, y) dx dy$  – скалярное произведение в пространстве измеримых интегрируемых с квадратами на области  $[x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$  вещественных функций;  $S(\xi, \eta) = f \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} K(x, y, \xi, \eta, \zeta) dx dy$  – поле от модели начального приближения.

3)  $\delta g^{(\theta)} = \delta g^{(\theta-1)} - \alpha^{(\theta)} \delta U^{(\theta)} - \beta^{(\theta)} S$ .

4)  $\Phi^{(\theta)} = \Phi^{(\theta-1)} + \alpha^{(\theta)} \delta g^{(\theta-1)} + \beta^{(\theta)}$ .

5) Проверяем условия остановки итерационного процесса:

$\|\delta g^{(\theta)}\| = \sqrt{\langle \delta g^{(\theta)}, \delta g^{(\theta)} \rangle} < \varepsilon$  (достижение требуемой точности  $\varepsilon$  подбора поля) либо  $\delta g^{(\theta)}$  постоянно (так как подбор производится с точностью до константы); если ни одно условие не выполнено – переходим к следующей итерации  $\theta + 1$ .

В итоге, после завершения цикла, распределение плотности  $\rho(x, y, z) = \rho_0(z)\Phi^{(0)}(x, y)$  позволяет аппроксимировать (с точностью до константы) разницу  $\delta g^{(0)}$  между наблюдаемым и полем модели нулевого приближения. Таким образом, прибавляя к модели нулевого приближения указанное распределение, получаем плотностную модель с полем, близким к наблюдаемому, с погрешностью  $\|\delta g^{(0)}\|$ .

**1.2.3. Обратная задача гравиметрии. Дискретизация.** На разбиении  $\{x_i, y_j, z_k\}$  построим сеточный аналог (1.4) мультипликативной плотности  $\rho_{i,j}^k$ :  $\rho_0(z) = \rho_0^k$ ,  $z \in [z_k; z_{k+1})$ ;  $\Phi(x, y) = \Phi_{i,j}$ ,  $(x, y) \in [x_i; x_{i+1}) \times [y_j; y_{j+1})$ ,  $i \in \overline{0, N_x - 1}$ ,  $j \in \overline{0, N_y - 1}$ ,  $k \in \overline{0, N_z - 1}$ . Поле  $U(\xi, \eta, \zeta)$  на высоте  $\zeta$  от слоистого параллелепипеда рассчитаем на горизонтальной сетке в точках  $\vec{\tau}$ . На основании (1.16) имеем:

$$U(\xi_{i_1}, \eta_{j_1}, \zeta) = U_{i_1, j_1} = f \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \Phi_{i,j} \sum_{k=0}^{N_z} \Delta \rho_0^k S_{i_1, j_1, i, j}^k, \quad (1.26)$$

где  $\Delta \rho_0^k$  – разность нормальных плотностей  $k$  и  $k-1$  горизонтальных слоев:

$$\Delta \rho_0^k = \rho_0^k - \rho_0^{k-1}, \quad k \in \overline{1, N_z - 1} \text{ и } \Delta \rho_0^0 = \rho_0^0, \quad \Delta \rho_0^{N_z} = -\rho_0^{N_z-1}, \quad S_{i_1, j_1, i, j}^k = S_{i_1, j_1}^k(\xi_{i_1}, \eta_{j_1}, \zeta).$$

Для уменьшения числа индексов оператора (1.26) прямой задачи введем сплошную индексацию вертикальных столбцов плотностного параллелепипеда:  $n = i + jN_x$ ,  $n \in \overline{0, N_x N_y - 1}$  и точек  $\vec{\tau}$ :  $m = i_1 + M_x j_1$ ,  $m \in \overline{0, M - 1}$ . Если при этом  $\xi_0 \in (x_0, x_1)$ ,  $\eta_0 \in (y_0, y_1)$ ,  $N_x = M_x$ ,  $N_y = M_y$ , то над (или под) каждым плотностным столбцом с индексом  $n$  находится только одна точка вычисления поля, ее индекс  $m = n$  (более того,  $i_1 = i$ ,  $j_1 = j$ ). Далее считаем эти условия выполненными.

Наблюдаемое гравитационное поле  $g$  на высоте  $\zeta$  (или его трансформанты) считаем заданным в точках  $\vec{\tau}$ :

$$g(\xi_{i_1}, \eta_{j_1}, \zeta) = g_m.$$

Дискретизация (1.26) интегрального оператора  $S$  прямой задачи приводит к СЛАУ:

$$f \sum_{n=0}^{M-1} \Phi_n \sum_{k=0}^{N_z} S_{m,n}^k \Delta \rho_0^k = g_m. \quad (1.27)$$

Здесь  $S_{m,n}^k$  – трехмерный тензор интегрирования;  $\Delta \rho_0^k$  – приращение плотности по глубине;  $\Phi_n$  – неизвестное латеральное изменение плотности.

В уравнении (1.27) коэффициентами при неизвестных  $\Phi_n$  являются заранее определенные величины – внутренние суммы по  $k$  в правой части формулы (1.26). По физическому смыслу – это значения поля в точках  $\vec{\tau}$  вертикальных столбцов  $D_n$ , набранных из элементов  $D_n^k$  с плотностями  $\rho_0^k$ :

$$S_{m,n} = f \sum_{k=0}^{N_z} S_{m,n}^k \Delta \rho_0^k. \quad (1.28)$$

Задача о нахождении плотности в слое сводится к решению СЛАУ  $S_{m,n}\Phi_n = g_m$ . Матрица  $S_{m,n}$  образована сверткой (1.28) тензора интегрирования с вектором приращения одномерной плотности и вычисляется только один раз. Соответственно, для любого вектора неизвестных  $\Phi_n$  вычисление поля от трехмерного параллелепипеда сводится к элементарной операции умножения матрицы на вектор:

$$U_m = \sum_{n=0}^{M-1} S_{m,n}\Phi_n. \quad (1.29)$$

**1.2.4. Обратная задача гравиметрии. Итерационный процесс в дискретном виде.** Мы предлагаем устойчивый адаптивный итерационный алгоритм решения СЛАУ (1.27) линейной обратной задачи, опирающийся на идеи метода локальной минимизации [Мартышко и др., 2010]. В этом методе используется локально-одномерная модель распределения плотности: на каждой итерации приращение поля от вертикального столба  $D_n$  вычисляется только для эпицентральной точки сетки  $m = n$  [Мартышко и др., 2010; Мартышко, Пруткин, 2003]. Это означает, что из всей суммы (1.29) для поля  $U_m$  учитывается лишь одно слагаемое  $\Phi_m S_{m,m}$ .

Обозначим через  $\delta g_m^{(\theta)}$  разность подбираемого ( $g_m$ ) и модельного ( $U_m^{(\theta)}$ ) полей в точке  $\vec{q}_m$  после итерации  $\theta$ :

$$\delta g_m^{(\theta)} = g_m - U_m^{(\theta)} = g_m - \sum_{n=0}^{M-1} S_{m,n}\Phi_n^{(\theta)},$$

где  $\Phi_n^{(\theta)}$  – значение  $\Phi$  для  $n$ -ого столба модели после итерации  $\theta$ ;  $\delta g_m^{(0)}$  есть разность в точке  $\vec{q}_m$  наблюдаемого и поля начальной модели.

В основе предлагаемого алгоритма лежит последовательное уменьшение величины невыбранного поля  $\delta g$  независимо в каждой точке сетки за счет изменения  $\Phi$  для вертикального плотностного столба под этой точкой. Если бы поле в точке  $\vec{q}_m$  было обусловлено только массами ближайшего столбца  $D_m$  и не зависело от остальных, то  $\Phi_m$  определялось бы из отношения  $g_m/S_{m,m}$ . Хотя условие не верно, но  $D_m$  вносит больший вклад в поле в точке  $\vec{q}_m$ , чем любой другой столбец (при равных плотностях). Поэтому в первом приближении величину  $\delta\Phi_m^{(\theta)} = \delta g_m^{(\theta-1)}/S_{m,m}$  имеет смысл принять за поправку к  $\Phi_m$  на итерации  $\theta$ , которая дополнит модельное поле до наблюдаемого, аппроксимируя оставшееся после предыдущей итерации. Добавление в каждой точке к  $\Phi_m^{(\theta-1)}$  значений  $\delta\Phi_m^{(\theta)}$  изменяет модельное поле на величину  $\delta U_m^{(\theta)} = U_m^{(\theta)} - U_m^{(\theta-1)} = \sum_{n=0}^{M-1} \frac{S_{m,n}}{S_{n,n}} \delta g_n^{(\theta-1)} = \delta \hat{U}_m^{(\theta)}$ .

Множество  $\left(\delta \hat{U}_m^{(\theta)}\right)_{m=0}^{M-1}$  лучше вычислять не по формуле (1.28), а при помощи быстрого алгоритма, приведенного выше. Таким образом, после итерации  $\theta$ :  $\Phi_m^{(\theta)} = \Phi_m^{(\theta-1)} + \delta\Phi_m^{(\theta)}$ ,  $\delta g_m^{(\theta)} = \delta g_m^{(\theta-1)} - \delta U_m^{(\theta)}$ . Остановиться следует по достижении требуемой точности  $\varepsilon$  подбора поля: при условии  $\|\delta g^{(\theta)}\| = \sqrt{\sum_{m=0}^{M-1} (\delta g_m^{(\theta)})^2} < \varepsilon$ .

Однако построенная таким образом итерационная схема в большинстве случаев будет расходящейся ( $\|\delta g^{(\theta)}\|$  будет только увеличиваться). Причина в том, что при прочих равных условиях вклад  $D_m$  в модельное поле в точке  $\vec{q}_m$  может быть меньше вклада всех



остальных столбцов  $D \setminus D_m$ . Тем меньше, чем меньше площадь  $\Delta x \Delta y$  ячейки сетки разбиения модели в плоскости  $Oxy$ , т. к.  $\lim_{\Delta x \Delta y \rightarrow 0} \|U(D_m)\| = 0$ , а  $\|U(D)\|$  не зависит от  $\Delta x \Delta y$ . Мы же, полагая  $\delta \Phi_m^{(\theta)} = \delta g_m^{(\theta-1)} / S_{m,m}$ , относим всю величину поля  $\delta g_m^{(\theta-1)}$  к столбцу  $D_m$ , тем самым на каждой итерации завышая поправку к латеральной плотности:  $\lim_{\Delta x \Delta y \rightarrow 0} |\delta \Phi_m^{(\theta)}| = \infty$ . Чтобы этого не происходило, на каждой итерации примем  $\delta \Phi_m^{(\theta)} = \alpha^{(\theta)} \frac{\delta g_m^{(\theta-1)}}{S_{m,m}} + \beta^{(\theta)}$ , где  $\alpha^{(\theta)}$  и  $\beta^{(\theta)}$  – некоторые коэффициенты, общие для всех столбцов  $\{D_m\}_{m=0}^{M-1}$ . Невязка поля в каждой точке в таком случае будет равна

$$\delta g_m^{(\theta)} = \delta g_m^{(\theta-1)} - \alpha^{(\theta)} \delta \hat{U}_m^{(\theta)} - \beta^{(\theta)} S_m, \quad (1.30)$$

где  $S_m = \sum_{n=0}^{M-1} S_{m,n}$  – поле от всего параллелепипеда  $D$  при  $\Phi(x, y) \equiv 1$  в точке  $\vec{q}_m$ .  $\alpha^{(\theta)}$  и  $\beta^{(\theta)}$  выберем исходя из условия минимума  $\|\delta g^{(\theta)}\|$ :

$$\begin{aligned} \alpha^{(\theta)} &= \frac{1}{Q^{(\theta)}} \left( \sum_{m=0}^{M-1} (S_m)^2 \sum_{m=0}^{M-1} \delta g_m^{(\theta-1)} \delta \hat{U}_m^{(\theta)} - \sum_{m=0}^{M-1} S_m \delta \hat{U}_m^{(\theta)} \sum_{m=0}^{M-1} S_m \delta g_m^{(\theta-1)} \right); \\ \beta^{(\theta)} &= \frac{1}{Q^{(\theta)}} \left( \sum_{m=0}^{M-1} (\delta \hat{U}_m^{(\theta)})^2 \sum_{m=0}^{M-1} S_m \delta g_m^{(\theta-1)} - \sum_{m=0}^{M-1} S_m \delta \hat{U}_m^{(\theta)} \sum_{m=0}^{M-1} \delta g_m^{(\theta-1)} \delta \hat{U}_m^{(\theta)} \right); \\ Q^{(\theta)} &= \sum_{m=0}^{M-1} (S_m)^2 \sum_{m=0}^{M-1} (\delta \hat{U}_m^{(\theta)})^2 - \left( \sum_{m=0}^{M-1} S_m \delta \hat{U}_m^{(\theta)} \right)^2. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Резюмируя, запишем основные этапы итерационного алгоритма для нахождения значений  $\{\Phi_m\}_{m=0}^{M-1}$ , минимизирующих невязку наблюдаемого и модельного полей  $\|\delta g\|$ . Сначала считаем поле  $U_m^{(0)}$  от модели нулевого приближения и «остаточное» поле  $\delta g_m^{(0)} = g_m - U_m^{(0)}$ , принимаем  $\Phi_m^{(0)} = 0$ . Далее циклически повторяем следующие шаги (записано для итерации  $\theta \geq 1$ ):

6) Вычисляем  $\delta \hat{U}_m^{(\theta)} = \sum_{n=0}^{M-1} \frac{S_{m,n}}{S_{n,n}} \delta g_n^{(\theta-1)}$ , то есть поле от модели, в которой  $\Phi_m = \delta g_m^{(\theta-1)} / S_{m,m}$ .

7) По формулам (1.31) считаем  $\alpha^{(\theta)}$  и  $\beta^{(\theta)}$ .

8) По формуле (1.30) считаем  $\delta g_m^{(\theta)}$ .

9) Считаем  $\Phi_m^{(\theta)} = \Phi_m^{(\theta-1)} + \alpha^{(\theta)} \frac{\delta g_m^{(\theta-1)}}{S_{m,m}} + \beta^{(\theta)}$ .

10) Проверяем условия остановки итерационного процесса:  $\|\delta g^{(\theta)}\| = \sqrt{\sum_{m=0}^{M-1} (\delta g_m^{(\theta)})^2} < \varepsilon$  (достижение требуемой точности  $\varepsilon$  подбора поля) либо  $\delta g^{(\theta)}$  постоянно (так как подбор производится с точностью до константы); если ни одно условие не выполнено – переходим к следующей итерации  $\theta + 1$ .

В итоге, после завершения цикла распределение плотности  $\rho(x, y, z) = \rho_0^k \Phi_{i,j}^{(\theta)}$ ,  $(x, y, z) \in [x_i; x_{i+1}] \times [y_j; y_{j+1}] \times [z_k; z_{k+1}]$ ,  $i \in \overline{0, N_x - 1}$ ,  $j \in \overline{0, N_y - 1}$ ,  $k \in \overline{0, N_z - 1}$  аппроксимирует (с точностью до константы) разницу  $\delta g^{(0)}$  между наблюдаемым и полем

модели нулевого приближения. Таким образом, прибавляя к модели нулевого приближения указанное распределение, получаем плотностную модель с полем, близким к наблюдаемому, с погрешностью  $\|\delta g^{(0)}\|$ .

**1.2.5. Тестирование алгоритма решения линейной обратной задачи** (Мартышко и др., 2013). Для оценки работоспособности итерационного алгоритма решения линейной обратной задачи гравиметрии рассмотрим модельный пример неоднородного распределения плотности. Область  $D$  представляет собой параллелепипед  $D = 50 \times 50 \times 10 \text{ км}^3$ , заполненный двумя плотностными включениями (рис. 1.5): центрированной приповерхностной вставкой  $D_1 = 20 \times 20 \times 2 \text{ км}^3$  с плотностью  $\rho_1 = -1,0 \text{ г/см}^3$  и такой же, но более глубокозалегающей вставкой  $D_2$  с плотностью  $\rho_2 = 2,0 \text{ г/см}^3$ . Верхняя кромка  $D_1$  расположена на глубине 2 км от уровня дневной поверхности; верхняя кромка  $D_2$  – на глубине 4 км. Сетку разбиения модели и точек вычисления поля выберем так, чтобы  $N_x = N_y = N_z = M_x = M_y = 50$ ,  $x_0 - \xi_0 = \frac{\Delta x}{2}$ ,  $y_0 - \eta_0 = \frac{\Delta y}{2}$ ,  $\Delta x = \Delta y = 1 \text{ км}$ ,  $\Delta z = 0,2 \text{ км}$ . Вычислим поле модели и приведем его к нулевому среднему значению (см. рис. 1.5), будем считать полученные значения «наблюдаемым» полем  $g_m$ .

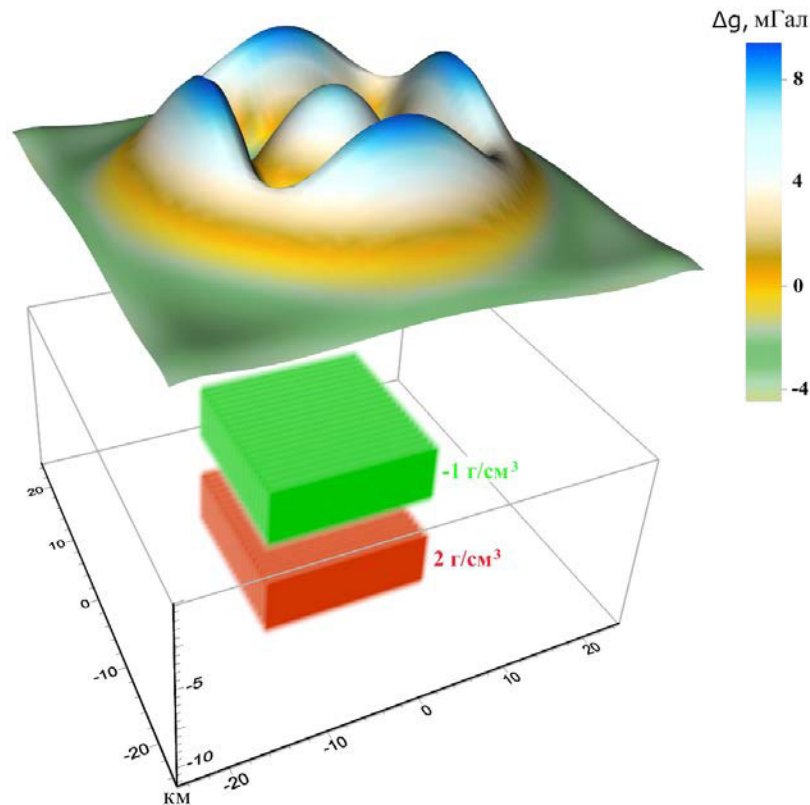


Рис. 1.5. Прямая задача гравиметрии для неоднородного плотностного параллелепипеда: модель распределения трехмерной плотности  $\rho(x, y, z)$  и расчетное модельное поле, приведенное к нулевому среднему

Распределение по глубине средней плотности модели  $D$  представлено на рис. 1.6, его мы считаем известным и принимаем в качестве  $\rho_0(z)$ .



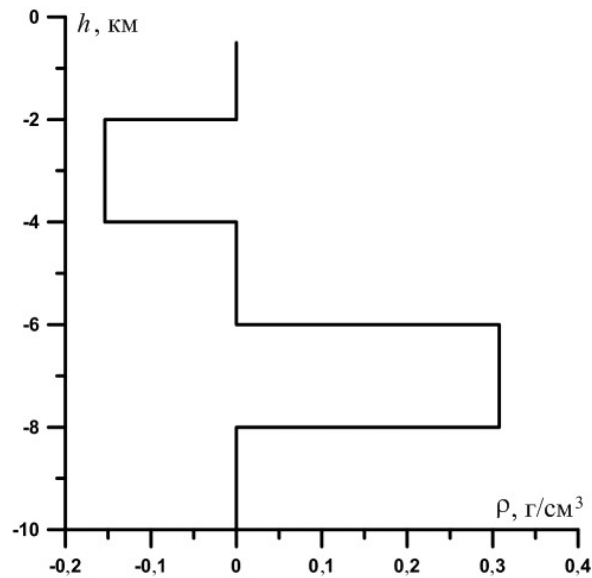


Рис. 1.6. Изменение с глубиной средней плотности исходной модели

На рис. 1.7 представлены результаты решения линейной обратной задачи (определения плотности по заданному полю). В варианте «а» использована априорная информация о распределении плотности с глубиной в исходной модели (см. рис. 1.6); в варианте «б»  $\rho_0(z) \equiv 1$ . Оба варианта полученных решений удовлетворяют заданному полю  $g_m$  с относительной погрешностью подбора менее 1 % и устойчивы относительно его вариаций. Для 12 итераций время счета задачи на сетке поля  $50 \times 50$  составило не более 2-х минут.

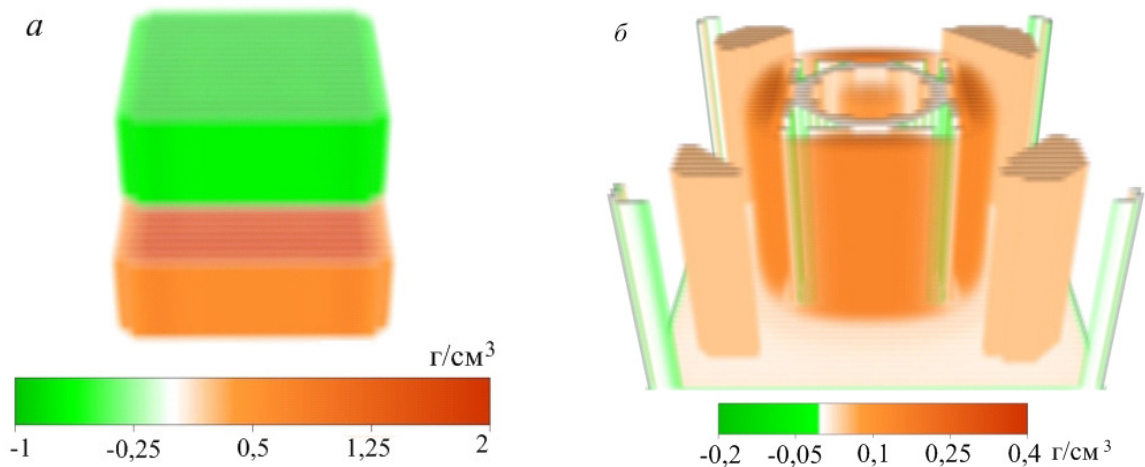


Рис. 1.7. Решение линейной обратной задачи:

*a* – с учетом зависимости  $\rho_0(z)$  плотности от глубины как в исходной модели (см. рис. 1.6);  
*б* – при  $\rho_0(z) \equiv 1$

Решение, изображенное на рис. 1.7, *a*, хорошо согласуется с исходной моделью трехмерного распределения плотности на рис. 1.3. Погрешность восстановления плотности приповерхностной вставки  $D_1$  составляет 10 %; нижележащей вставки  $D_2$  – 15 %. Решение на рис. 1.7, *б* является абсолютно не приемлемым: восстановленная плотность почти на порядок отличается от исходной модели и принимает положительные и отрицательные компенсирующие значения на всех глубинах.

### 1.3. Структурная обратная задача гравиметрии (определение границы между слоями по заданному полю)

Построение региональных геологических и геофизических моделей вдоль протяженных сейсмических профилей и их уточнение основаны на методе гравитационного моделирования. Главная проблема метода – это выбор максимально стабильных, геологически содержательных решений обратной задачи из множества эквивалентных решений. Как отмечено выше, обратная задача является некорректной: имеет неединственное решение и существенно зависит от входных данных [Иванов и др., 1978; Тихонов и др., 1974; Лаврентьев и др., 1980; Goetze and Lahmeyer, 1988; Страхов, 1974]. Чтобы уменьшить неоднозначность метода гравитационного моделирования, мы предлагаем использовать априорную геологическую и геофизическую информацию на этапе построения модели начального приближения.

В настоящее время обычным способом уточнения топографии поверхностей раздела является моделирование на основе решения прямой задачи [Старостенко, 1978; Дружинин и др., 2000]. Но если этот способ проб и ошибок и подходил для двумерных задач, в трехмерном случае его использование осложнено. Изменение параметра поверхности на одном из профилей немедленно влияет на гравитационное поле вдоль других профилей. Из-за этого процедура становится нестабильной. Многие исследователи пытались решить эту проблему – например, Parker (1972), Oldenburg (1974) и Tarel и др. (2004). Мы используем другой подход и решаем обратную задачу методом локальных поправок. Он позволяет избежать решения прямой задачи: решение автоматически вычисляется по входным данным в процессе последовательных итераций. Наша технология использует модифицированную схему локальных поправок для восстановления положения плотностных границ по разделенным аномалиям наблюдаемого поля [Мартышко и др., 2010]. При условии, что итерационный процесс сходится, этот метод позволяет получить двухпараметрическое (по плотности и средней глубине границы) семейство решений, выбрать единственное (и максимально близкое к начальной модели) решение.

**1.3.1. Прямая задача гравиметрии для однородного пласта.** Введем трехмерную декартову систему координат, в которой координатная плоскость  $xOy$  совпадает с земной поверхностью, направление оси  $z$  – вертикально вниз. Формула для вычисления поля от однородного пласта, ограниченного криволинейными поверхностями  $z_1(x,y)$  и  $z_2(x,y)$ , является следствием решения прямой задачи гравиметрии для трехмерного объекта [Нумеров, 1930]:

$$\Delta g(x', y', 0) = -f \cdot (\sigma - \sigma_F) \int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{dxdy}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}} \Bigg|_{z_1(x', y')}^{z_2(x', y')} \quad (1.32)$$

где  $f$  – гравитационная постоянная;  $\Delta g(x', y', 0)$  – аномальное гравитационное поле криволинейного пласта, рассчитанное на уровне дневной поверхности;  $\sigma$  – постоянная плотность слоя, отсчитываемая от некоторой средней плотности  $\sigma_F$  модели.

В формуле (1.32) обозначим через  $S(z_2, z_1)$  (далее структурный интеграл) аномальное поле от криволинейного пласта единичной плотности.

$$\begin{aligned} S(z_2, z_1) &= -f \int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{dxdy}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}} \Bigg|_{z_1(x', y')}^{z_2(x', y')} = \\ &= -f \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z_1^2}} \right) dxdy. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Как первообразная функция по  $z$ , структурный интеграл (1.33) обладает очевидными свойствами по пределам интегрирования  $z_1$  и  $z_2$ :

$$\begin{aligned} S(z_2, z_1) &> 0, \quad z_2 > z_1 \\ S(z_2, z_1) &= -S(z_1, z_2) \\ S(z_2, z_1) &= S(z_2, 0) - S(z_1, 0) \end{aligned} \quad (1.34)$$

Знак структурного интеграла  $S(z_2, z_1)$  определяется соотношением граничных высот  $z_1$  и  $z_2$ , т. е. геометрическим фактором. Но по иному, его можно связать со знаком единичной плотности масс, заключенных между двумя граничными поверхностями  $z_1$  и  $z_2$ : при  $z_2 > z_1$  плотность положительна, при  $z_2 < z_1$  плотность отрицательна. Отсюда вытекают три важных методических следствия:

*Следствие 1.* Пусть  $z_1 = z(x, y)$  – криволинейная граница раздела;  $z_2 = h$  – асимптотическая плоскость этой границы (рис. 1.8, б). Тогда

$$S(h, z) = -f \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2(x, y)}} \right) dx dy \quad (1.35)$$

представляет собой гравитационное поле избыточных масс единичной плотности, заключенных между криволинейной поверхностью и её асимптотической плоскостью. Причем, над плоскостью массы положительны, а под плоскостью – отрицательны. Такое представление  $S(h, z)$  аномального поля называется гравитационным эффектом плотностной границы [Страхов, 1974; Федорова, Цирульский, 1976].

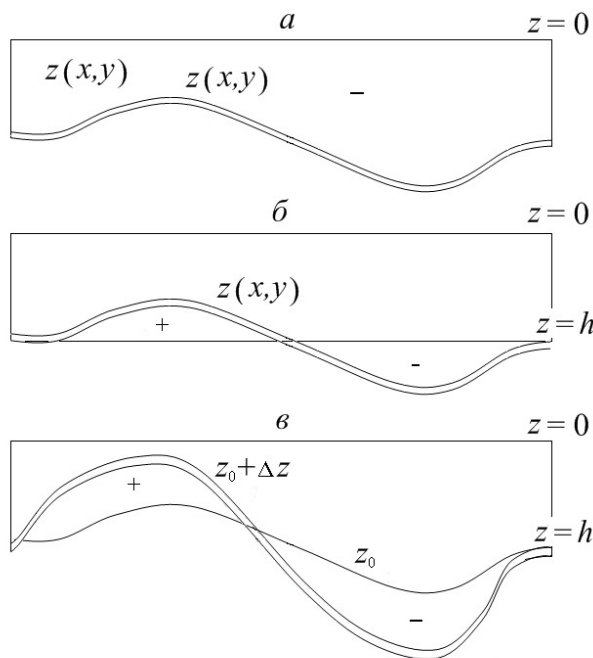


Рис. 1.8. Модели криволинейного пласта, соответствующие различным представлениям структурного интеграла  $S(z_2, z_1)$ , вычисленного от границы  $z_1$  (двойная линия) до границы  $z_2$  (одинарная линия):

- $a$  – пласт  $S(0, z)$  от границы  $z = z(x, y)$  до дневной поверхности  $z = 0$ ;
- $б$  – пласт  $S(h, z)$  от границы  $z = z(x, y)$  до асимптотической плоскости  $z = h$ ;
- $в$  – пласт  $S(z_0, z_0 + \Delta z)$ , от уточненной границы  $z = z_0 + \Delta z$  до её нулевого приближения  $z = z_0$

*Следствие 2.* Пусть  $z_2 = z_0(x, y)$  – положение плотностной границы, принятое как начальное;  $z_1 = z_0 + \Delta z$  – уточненное положение криволинейной границы (рис. 1.8, в).

$$S(z_0, z_0 + \Delta z) = -f \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z_0 + \Delta z)^2}} \right) dx dy. \quad (1.36)$$

Интеграл (1.36) представляет собой поле масс единичной плотности, заключенных между начальной (нулевой) и уточненной криволинейной поверхностью. Знак избыточной плотности определяется знаком приращения  $\Delta z$ : над границей нулевого приближения плотность положительна, а под ней отрицательна. Такое представление аномального поля по аналогии с (1.35) будем называть гравитационным эффектом плотностной границы  $z_0 + \Delta z(x', y')$  относительно криволинейной топологической асимптоты  $z_0(x', y')$ .

*Следствие 3.* Структурный интеграл  $S(z_2, z_1)$  имеет слабую особенность в точке  $(x = x', y = y', z_2 \cup z_1 = 0)$ , поэтому при расчете поля от приповерхностных границ кубатурная формула численного интегрирования не применима. Так, например, поле от криволинейного пласта, ограниченного сверху дневной поверхностью  $z_2 = 0$ , а снизу поверхностью  $z_1 = z(x', y')$  (рис. 1.8, а) будет вычисляться по формуле:

$$S(z, 0) = -f \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \right) dx dy. \quad (1.37)$$

Интеграл (1.37) в смысле Римана не существует, хотя первообразная для  $S(z, 0)$ , безусловно, определена. Полагая в (1.37)  $z = h = \text{const}$  и  $\rho = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ , получаем:

$$S(h, 0) = -2\pi f \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} - \frac{1}{\rho} \right) \rho d\rho = -2\pi f \cdot \lim_{\rho \rightarrow \infty} (\sqrt{\rho^2 + h^2} - h - \rho) = +2\pi f h.$$

Формула (1.32) решения прямой задачи для криволинейного пласта, с учетом представления (1.33), имеет вид:

$$\Delta g(x', y', 0) = (\sigma - \sigma_F) \cdot S(z_2(x', y'), z_1(x', y')). \quad (1.38)$$

Свойства (1.34–1.36) структурного интеграла позволяют легко расчленить модельное поле криволинейных пластов на аддитивные составляющие плотностных контактов и унифицировать различные представления плотности слоистой среды, встречающиеся в практике гравитационного моделирования [Шванк, Люстих, 1947; Страхов, 1974].

**1.3.2. Параметризация слоистой среды.** В практике гравитационного моделирования в расчетах используются объемные массы пластов с криволинейными границами и плотностью  $\sigma_k$  [Старостенко, 1978]. Для сопоставления с аномалиями наблюдаемого поля в расчеты вводят отклонения истинной плотности  $\sigma_k$  от некоторого фонового значения  $\sigma_F$ . Фоновая плотность является достаточно произвольным параметром неоднородной

плотностной модели. В частности допускается, что это может быть либо средневзвешенная плотность по слоям модели, либо другая константа (в том числе равная нулю), которая выбирается исключительно на интуитивном уровне [Дружинин и др., 2009; Страхов, Романюк; 1984].

Формула вычисления гравитационного эффекта от слоистой среды для поверхностей раздела оперирует со скачками плотностей  $\Delta\sigma_k = \sigma_{k+1} - \sigma_k$ , образующихся на контакте  $z_k$  подстилающих и вышележащих пород. Плотность  $\sigma_{k+1}$  каждого слоя обрамления служит как бы «плотностью вмещающей среды» для внутреннего слоя  $\sigma_k$ . Покажем, что поле объемно распределенных масс слоистой среды непосредственно преобразуется в поле плотностных контактов. При этом вопрос о значении постоянной составляющей аномального модельного поля и выборе фоновой плотности  $\sigma_F$  решается однозначно.

Пусть слой с плотностью  $\sigma_k$  ( $k = 1, \dots, M$ ) ограничен сверху криволинейной поверхностью  $z_{k-1}$ , а снизу – поверхностью  $z_k$  (рис. 1.9, а). Поверхность  $z_0 = 0$  принимается за плоскую дневную поверхность, на уровень которой рассчитывается поле модели. Модельное поле от  $M$  криволинейных пластов с плотностями  $(\sigma_k - \sigma_F)$  обобщается суперпозицией решений прямой задачи (1.38) для  $k$ -ого пласта:

$$\Delta g = \sum_{k=1}^M (\sigma_k - \sigma_F) \cdot S(z_k, z_{k-1}). \quad (1.38a)$$

Обозначим  $H_k = Avr(z_k)$  среднее значение глубины  $k$ -ой поверхности в пределах исследуемого планшета. Воспользуемся очевидным свойством структурного интеграла (1.33):

$$S(z_k, z_{k-1}) = S(z_k, H_k) + S(H_k, H_{k-1}) + S(H_{k-1}, z_{k-1}).$$

Согласно (1.34) и (1.37)

$$\begin{aligned} S(H_k, H_{k-1}) &= S(H_k, 0) - S(H_{k-1}, 0) = 2\pi f(H_k - H_{k-1}); \\ S(H_0, z_0) &= S(0, 0) = 0, \end{aligned}$$

преобразуем формулу (1.38a) для вычисления поля  $M$  криволинейных пластов:

$$\Delta g = 2\pi f \sum_{k=1}^M (\sigma_k - \sigma_F)(H_k - H_{k-1}) + \sum_{k=2}^M (\sigma_k - \sigma_F) S(H_{k-1}, z_{k-1}) - \sum_{k=1}^M (\sigma_k - \sigma_F) S(H_k, z_k).$$

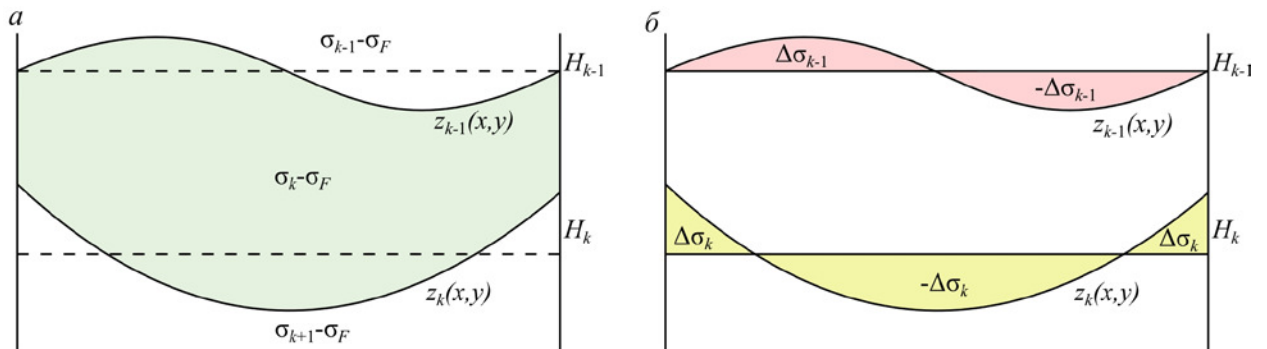


Рис. 1.9. Параметризация слоя:  
а – исходный слой; б – представление слоя как совокупности границ

Меняя во втором слагаемом индекс « $k$ » на « $k-1$ » и объединяя слагаемые с одинаковым индексом суммирования, получаем решение для модели  $M$  плотностных контактов (рис. 1.9, б):

$$\Delta g = 2\pi f \sum_{k=1}^M (\sigma_k - \sigma_F)(H_k - H_{k-1}) + \sum_{k=1}^{M-1} [(\sigma_{k+1} - \sigma_k) S(H_k, z_k)] + (\sigma_F - \sigma_M) S(H_M, z_M). \quad (1.39)$$

Из решения в форме (1.39) явно выделяется постоянная и переменная составляющие гравитационного поля. И здесь важны три обстоятельства:

1. Постоянная составляющая, или фоновое поле, равняется сумме полей  $M$  горизонтальных пластов с мощностями  $(H_k - H_{k-1})$  и плотностями  $(\sigma_k - \sigma_F)$ , отсчитываемых от фоновой плотности. И если в качестве фоновой принять средневзвешенную плотность горизонтально-слоистой среды, то постоянная составляющая поля обратится в нуль.

$$\sum_{k=1}^M (\sigma_k - \sigma_F)(H_k - H_{k-1}) = \sum_{k=1}^M \sigma_k (H_k - H_{k-1}) - \sigma_F H_M = 0,$$

где

$$\sigma_F = \frac{1}{H_M} \sum_{k=1}^M \sigma_k (H_k - H_{k-1}).$$

2. Скачок плотности на  $k$ -ой контактной поверхности  $k = 1, 2, \dots, (M - 1)$  равен разности плотностей ниже и выше лежащих слоев:  $\Delta\sigma_k = \sigma_{k+1} - \sigma_k$ . Для нижней поверхности  $z_M$  скачок плотности  $\Delta\sigma_M = \sigma_F - \sigma_M$  вычисляется по разности средневзвешенной плотности модели и плотности пород  $M$ -ого слоя. Чтобы сохранить корректность постановки задачи, в модель слоистой среды с криволинейной нижней границей необходимо добавить плотность  $\sigma_{M+1}$  неограниченного массива подстилающих пород. Тогда переменная составляющая, или аномальное поле от  $M$  плотностных границ, будет рассчитываться по единой формуле:

$$\Delta g = \sum_{k=1}^M \Delta\sigma_k \cdot S(H_k, z_k). \quad (1.40)$$

3. Горизонтальный плотностной контакт не вносит вклад в переменную составляющую расчетного поля плотностных границ. И если нижняя граница слоя будет плоской  $z_M = h$ , то  $H_M = \text{Avr}(z_M) = h$  и  $S(H_M, z_M) = S(h, h) = 0$ . Соответственно, исчезнет последний член суммы в формуле (1.40) и пропадет зависимость решения от перепада плотности  $\Delta\sigma_M$  на нижней границе. Это означает, что для модели слоистой среды с горизонтальной нижней (и верхней) границей аномальное поле не будет зависеть ни от средневзвешенной плотности пластов  $\sigma_F$ , ни от плотности пород подстилающего массива  $\sigma_{M+1}$ .

Таким образом, модельное поле (1.38а) криволинейных слоев с избыточной плотностью  $(\sigma_k - \sigma_F)$  (см. рис. 1.9, а) заменяется эквивалентным ему полем (1.40) контактных поверхностей со скачками плотностей  $\Delta\sigma_k = \sigma_{k+1} - \sigma_k$  (см. рис. 1.9, б). Это уменьшает параметрическую неоднозначность прямой задачи гравиметрии и позволяет перейти к постановке обратной задачи, уточняющей пространственное положение границ раздела в рамках модели многослойных сред.

**1.3.3. Обратная задача для контактной поверхности с асимптотической плоскостью.** Рассмотрим постановку обратной задачи гравиметрии для одной контактной поверхности с глубинной асимптотической плоскостью  $H$  и исследуем итерационную схему ее решения. В этом частном случае формула (1.40) решения прямой задачи для плотностных контактов содержит лишь одно слагаемое с  $k = 1$ :

$$\Delta g = \Delta\sigma_1 \cdot S(H_1, z_1) = \Delta\sigma \cdot S(H, z).$$

В решении среднюю глубину границы  $H = Avr(z)$  можно заменить глубиной до асимптотической плоскости  $z = H_A$ . Это не изменит морфологии аномального поля, но добавит в расчет постоянную составляющую, связанную со сдвигом опорного горизонта  $H \rightarrow H_A$ :

$$\Delta g = \Delta\sigma \cdot S(H, z) = \Delta\sigma \cdot S(H_A, z) - 2\pi f \Delta\sigma (H_A - H) \quad (1.41)$$

В решении прямой задачи для плотностного контакта изменение знака  $S(H_A, z)$  структурного интеграла (1.35) интерпретируется как изменение знака избыточной плотности. Модельное поле  $\Delta g$  создается распределением объемных масс с плотностями  $\pm \Delta\sigma$  внутри незамкнутых областей, примыкающих к асимптотической плоскости  $z = H_A$ . Несобственный интеграл в бесконечных пределах  $S(H_A, z)$  сходится при выполнении асимптотического предельного условия:

$$\lim_{|x|, |y| \rightarrow \infty} |z(x, y) - H_A| = 0.$$

Согласно представлению (1.35), перепишем решение прямой задачи (1.41) в развернутом виде, но без учета постоянной составляющей поля:

$$\begin{aligned} \Delta g(x', y', 0) &= \Delta\sigma \cdot S(H_A, z(x', y')) = \\ &= -\Delta\sigma f \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + H_A^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2(x, y)}} \right) dx dy. \end{aligned} \quad (1.42)$$

При известном значении поля  $\Delta g(x', y', 0)$  это – интегральное уравнение структурной обратной задачи гравиметрии относительно скачка плотности  $\Delta\sigma$  и координат контактной поверхности  $z = z(x', y')$ . Если к тому же избыточная плотность известна, то мы приходим к классическому интегральному уравнению Фредгольма I-го рода относительно функции  $z = z(x', y')$ . Эффективный алгоритм поиска устойчивых решений нелинейного уравнения Фредгольма был реализован в методе локальных поправок [Пруткин, 1986]. Алгоритм метода не использует нелинейную минимизацию, весьма прозрачен в исполнении и обладает высоким быстродействием и устойчивостью.

Зададим поле на дневной поверхности на равномерной сетке  $(x', y') = (x_{i_0}, y_{j_0})$ :

$$U_{i_0 j_0} = \Delta g(x_{i_0}, y_{j_0}, 0).$$

Этой же сеткой воспользуемся для приближенного вычисления интеграла в формуле (1.42). Пусть  $(x, y) = (x_i, y_j)$  и  $z(x, y) = z(x_i, y_j) = (z_{ij})$ . Дискретный аналог подынтегрального выражения представляет собой массив с 4-мя индексами:

$$K(x', y', x, y, z(x, y)) = K(x_{i_0}, y_{j_0}, x_i, y_j, z_{ij}) = K_{i_0 j_0}(z_{ij}).$$

Дискретизация интегрального уравнения (1.41) приводит к системе  $i_0 \times j_0$  нелинейных уравнений ( $c$  – коэффициент кубатурной формулы):

$$U_{i_0 j_0} = f c \Delta \sigma \cdot \sum_i \sum_j K_{i_0 j_0}(z_{ij}). \quad (1.43)$$

Итерационная схема ее решения состоит в следующем. Зададим приближение  $z_{ij}^n$  сеточной функции  $z_{ij}$ , полученное на  $n$ -ом шаге итерации;  $U_{i_0 j_0}^n$  – поле  $n$ -ого приближения:

$$U_{i_0 j_0}^n = f c \Delta \sigma \cdot \sum_i \sum_j K_{i_0 j_0}(z_{ij}^n).$$

Метод локальных поправок основывается на следующем положении: значение поля в данной точке земной поверхности в основном определяется глубиной залегания ближайшей точки контактной поверхности (и ее окрестности). Поэтому приращение сеточного поля на последовательных итерациях в некотором узле обеспечивается изменением сеточной функции  $z_{ij}$  в том же самом узле:

$$K_{i_0 j_0}(z_{ij}^n) = K_{ij}(z_{ij}^n) \cdot \delta_{i_0, i} \cdot \delta_{j_0, j},$$

где  $\delta_{i_0, i}, \delta_{j_0, j}$  – символы Кронекера.

Итерационная поправка  $K_{ij}$  для уравнения (1.42) равна разности обратных величин аппликата эпицентральных точек самой поверхности и ее асимптоты:

$$K_{ij}(z_{ij}^n) = \frac{1}{z_{ij}^n} - \frac{1}{H_A}.$$

Для приращений эпицентральных значений поля  $U_{ij} - U_{ij}^n$ ; ( $i_0 = i, j_0 = j$ ) система нелинейных уравнений (1.43) сводится к упрощенной итерационной формуле:

$$f c \Delta \sigma \cdot (K_{ij}(z_{ij}^{n+1}) - K_{ij}(z_{ij}^n)) = U_{ij} - U_{ij}^n.$$

Отсюда следует основная схема метода локальных поправок: приращение обратных глубин контактной поверхности пропорционально приращению поля в эпицентральной точке:

$$\frac{1}{z_{ij}^{n+1}} - \frac{1}{z_{ij}^n} = \frac{U_{ij} - U_{ij}^n}{f c \Delta \sigma}. \quad (1.44)$$

С ростом глубины  $z_{ij}$  устойчивость сходимости итерационного процесса (1.44) уменьшается: малым значениям поля на дневной поверхности отвечают сколь угодно большие колебания глубокозалегающих границ. Чтобы для больших глубин избежать «раскачки» последовательных приближений ( $z_{ij}^n$ ) относительно искомого решения  $z_{ij}$ , применяют метод регуляризации [Мартышко и др., 2010]. Уменьшим размах амплитуды поля в правой части (1.44) за счет регуляризирующего множителя  $\alpha$

$$\frac{1}{z_{ij}^{n+1}} - \frac{1}{z_{ij}^n} = \frac{\alpha}{\beta} (U_{ij} - U_{ij}^n); \quad (\alpha < 1), \quad \beta = f c \Delta \sigma.$$



На практике мы предлагаем использовать более устойчивую в вычислительном отношении итерационную формулу:

$$z_{ij}^{n+1} = \frac{z_{ij}^n}{1 + \alpha/\beta \cdot z_{ij}^n (U_{ij} - U_{ij}^n)}. \quad (1.45)$$

Величину  $\alpha$  необходимо задавать достаточно малой, чтобы инициировать процесс подбора в нужном направлении. Шаг итераций при этом уменьшается, но увеличивается их число. Множитель  $\beta = f c \Delta\sigma$  зависит от величины избыточной плотности  $\Delta\sigma$ . При малых значениях  $\Delta\sigma$  сходимость итерационного процесса (1.45) можно обеспечить только значительным уменьшением параметра регуляризации  $\alpha$ ; нулевой скачок плотности дает расходящееся решение.

Условие сходимости решения (1.45)  $z_{ij}^{n+1} \approx z_{ij}^n$  обеспечивается выполнением неравенства

$$\begin{aligned} & \left| \alpha/\beta \cdot z_{ij}^n (U_{ij} - U_{ij}^n) \right| \ll 1, \\ \text{или} \quad \alpha \ll & \left| \frac{\beta}{z_{ij}^n (U_{ij} - U_{ij}^n)} \right| = \frac{f c |\Delta\sigma|}{z_{ij}^n |U_{ij} - U_{ij}^n|}. \end{aligned}$$

Значения полей  $U_{ij}^n$  последовательных приближений вычисляется по полной кубатурной формуле (1.42) или ее дискретному аналогу (1.43). При фиксированных параметрах границы (глубина  $H$  и перепад плотности  $\Delta\sigma$ ) максимальное приращение поля будет в варианте локально одномерной модели

$$(U_{ij} - U_{ij}^n)_{\max} = 2\pi f \Delta\sigma (z_{ij}^{n+1} - z_{ij}^n) = 2\pi f \Delta\sigma \Delta z_{ij}^n.$$

Отсюда для параметра регуляризации получаем точную оценку снизу:

$$\alpha_{\min} = \frac{c}{2\pi z_{ij}^n |\Delta z_{ij}^n|}; \quad \alpha \ll \alpha_{\min}. \quad (1.46)$$

Предварительная оценка параметра  $\alpha$  по величине шага сетки, глубине и диапазону колебаний восстанавливаемой плотностной границы позволяет контролировать сходимость метода локальных поправок и, в целом, повысить устойчивость и сходимость пошагового итерационного процесса. Очевидно, что для границ приповерхностного залегания алгоритм (1.45) формулы обратных аппликат (1.44) не приводит к сходящемуся решению.

Рассмотрим модельный пример. Пусть на глубине ниже уровня дневной поверхности расположены два локальных объекта (выступ и впадина), которые своими основаниями примыкают к плоскости на глубине  $h = 10$  км (рис. 1.10, а). Модельное поле объекта вычислено по формуле прямой задачи (1.41) при  $H = H_A = h$ . Результаты расчета показаны на рис. 1.10, в.

Модельный пример показывает, что метод локальных поправок одинаково устойчиво работает как для положительных, так и отрицательных форм рельефа. Поэтому требование, чтобы эпицентральная точка поверхности была ближайшей к точке вычисления поля, не является обязательно строгим. При оптимальном выборе параметра регуляризации алгоритм автоматически подстраивается под ту или иную форму поверхности. Для принятой глубины асимптоты  $h = 10$  км и мощности неоднородного включения  $\Delta z \approx +10 \hat{\epsilon}$  и  $\Delta z \approx -5 \hat{\epsilon}$  величина параметра регуляризации  $\alpha$  (1.46) не превышает 0,002 при  $c = 1 \text{ км}^2$ .

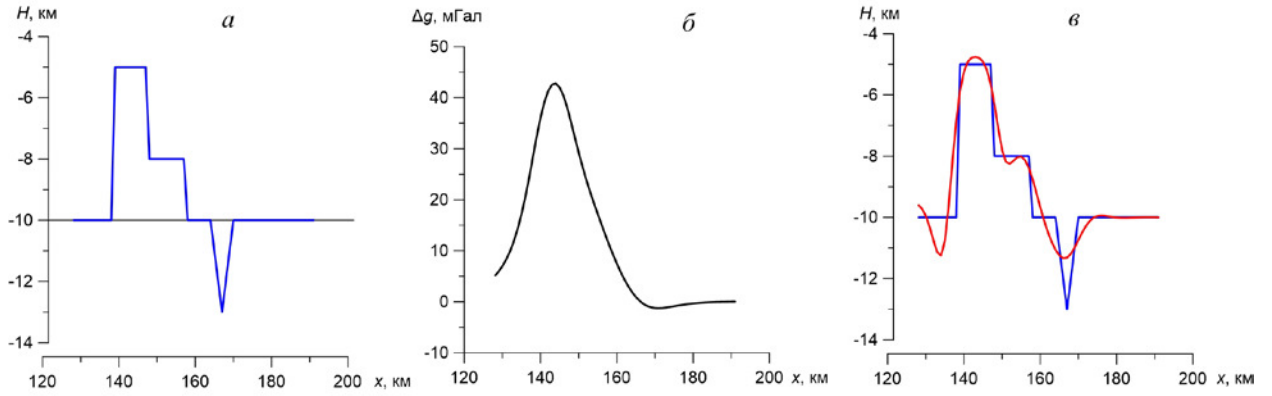


Рис. 1.10. Модельный пример:  
*a* – исходная граница; *б* – поле исходной границы; *в* – восстановленная граница

Численные эксперименты, выполненные по отработанным схемам для разных глубин, дают возможность переходить уже к реальной геометрии практически важных задач регионального плотностного моделирования многослойных сред.

**1.3.4. Обратная задача гравиметрии для многослойных сред.** Постановка обратной задачи гравиметрии для многослойных сред предусматривает корректировку границ раздела сейсмоплотностной модели начального приближения по невязке между аномалиями наблюдаемого и вычисленного полей. Реальные сейсмические границы весьма изрезаны и обладают непростой пространственной конфигурацией. И, практически, для любой из них невозможно задать асимптотическое примыкание к горизонтальной плоскости на некоторой глубине. Для нашего решения в форме (1.36) не требуется каких-либо ограничений на асимптотическое поведение искомых функций. Достаточно обеспечить конечность нормы превышений  $\|\Delta z_k\|_{L_2}$  искомой плотностной границы  $z_k^T$  над границей нулевого приближения  $z_k^0$  в метрическом пространстве  $L_2$ .

Пусть  $z = z_k^0(x', y')$  – уравнение границ сейсмоплотностной модели начального приближения;  $z = z_k^T(x', y')$  – уточненные уравнения результирующих границ;  $\Delta z_k = z_k^T - z_k^0$  – искомая уточняющая поправка. Скачок плотности на «*k*»-ой границе  $\Delta\sigma_k = \sigma_{k+1} - \sigma_k$ ; ( $k = 1, \dots, M$ ) предполагается заданным. Аномальное поле от *M* контактных поверхностей нулевой и результирующей модели, с точностью до постоянного слагаемого, вычисляется по одной и той же формуле (1.40):

$$\Delta g^0(x', y', 0) = \sum_{k=1}^M \Delta\sigma_k \cdot S(H_k, z_k^0),$$

$$\Delta g^T(x', y', 0) = \sum_{k=1}^M \Delta\sigma_k \cdot S(H_k, z_k^T).$$

Напомним, что здесь  $H_k$  обозначает среднюю глубину границ  $z_k^T$  ( $z_k^0$ ) в пределах модельного планшета. Разность этих двух полей выражается через разность структурных интегралов вида (1.35) для приращения глубин криволинейных границ относительно их средних значений:

$$Dg = \Delta g^T - \Delta g^0 = \sum_{k=1}^M \Delta\sigma_k \cdot [S(H_k, z_k^T) - S(H_k, z_k^0)] = \sum_{k=1}^M \Delta\sigma_k \cdot S(z_k^0, z_k^T). \quad (1.47)$$

Поле  $\Delta g^T$  от искомой границы  $z_k^T$  примем в качестве наблюдаемого; соответственно, поле  $\Delta g^0$  от границы  $z_k^0$  нулевого приближения – в качестве расчетного модельного поля. Наблюдаемое и модельное поле приведены к одному уровню дневной поверхности  $z = 0$ . Невязка  $Dg(x', y', 0)$ , между аномалиями наблюдаемого и вычисленного полей используется как целевая функция уточняющего подбора для неизвестных  $\Delta z_k$  интегрального уравнения (1.47) структурной обратной задачи гравиметрии для слоистой среды. Учитывая (1.36), получаем:

$$f \sum_{k=1}^M \Delta \sigma_k \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z_k^0 + \Delta z_k)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z_k^0)^2}} \right) dx dy = (1.48) \\ = Dg(x', y', 0).$$

По аналогии с (1.42) границам  $z_k^0(x', y')$  нулевого приближения можно придать смысл криволинейных топологических асимптот искомой функции  $z_k^T(x', y') = z_k^0 + \Delta z_k$  при решении структурной обратной задачи уравнения (1.48). Невязка поля  $Dg(x', y', 0)$  задается только в пределах модельного планшета; на том же носителе в конечных пределах будут вычисляться и поправки к начальному положению границ  $\Delta z_k = z_k^T - z_k^0$ . Естественно, что при такой постановке снимается вопрос о сходимости несобственных интегралов (1.48) на «бесконечности», поскольку вне области задания поля уточняющая поправка в решении равна нулю.

Задача (1.48) является недоопределённой: по заданной функции  $Dg(x', y', 0)$  мы пытаемся найти  $M$  неизвестных функций  $\Delta z_k(x', y')$ . Можно легко увеличить число условий связи (1.48) и порядок системы уравнений структурной обратной задачи для модели многослойных сред. Для этого достаточно задать набор высот  $\zeta_m \leq 0$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  над уровнем дневной поверхности и вычислить невязки полей  $Dg(x', y', \zeta_m)$  на всех этих высотах:

$$f \sum_{k=1}^M \Delta \sigma_k \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z_k^0 + \zeta_m + \Delta z_k)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z_k^0 + \zeta_m)^2}} \right) dx dy = \\ = Dg(x', y', \zeta_m).$$

Для уменьшения степени неопределенности задачи потребуем, чтобы искомые функции минимально отклонялись от границ  $z_k^0(x', y')$  нулевого приближения [Пруткин, 1986]:

$$\sum_{k=1}^M p_k (\Delta z_k)^2 \rightarrow \min, \quad (1.49)$$

где  $p_k$  – весовые коэффициенты, определяющие, за счет изменения какой из границ мы в основном пытаемся добиться соответствия поля от модели заданному наблюдаемому. Величина  $p_k$  пропорциональна вкладу дисперсии (изменчивости) поля от  $k$ -ой границы нулевого приближения  $z_k^0$  в суммарную дисперсию поля на дневной поверхности. Варьируя высоту пересчета, можно последовательно избавляться от коротковолновых составляющих поля приповерхностных границ, контролируя остаточную дисперсию невязки полей

повысотных трансформант, относящихся к более глубоким горизонтам плотностной модели начального приближения.

Поиск устойчивых решений относительно модели начального приближения продемонстрируем на следующем примере. В качестве топологической асимптоты (границы нулевого приближения) выберем куполообразную структуру на глубине 10 км. Вершина поднятия осложнена локальной низкоплотностной депрессией мощностью 2 км (рис. 1.11, а). Расчетное поле модели на уровне дневной поверхности приведено на рис. 1.11, б (фиолетовая кривая). Характерный провал куполообразной аномалии гравитационного поля исчезает уже при пересчете на высоту 20 км (оранжевая кривая на рис. 1.11, б). С этой высоты попытка восстановить рельеф искомой плотностной границы относительно горизонтальной плоскости не приводит к нужному результату (рис. 1.11, в, красная кривая). Однако, если мы выберем в качестве начального приближения зеленую кривую на рис. 1.11, в, также представляющую собой структуру с депрессией в центре, то локальное разуплотнение восстановится вполне надежно (см. синяя кривая на рис. 1.11, в).

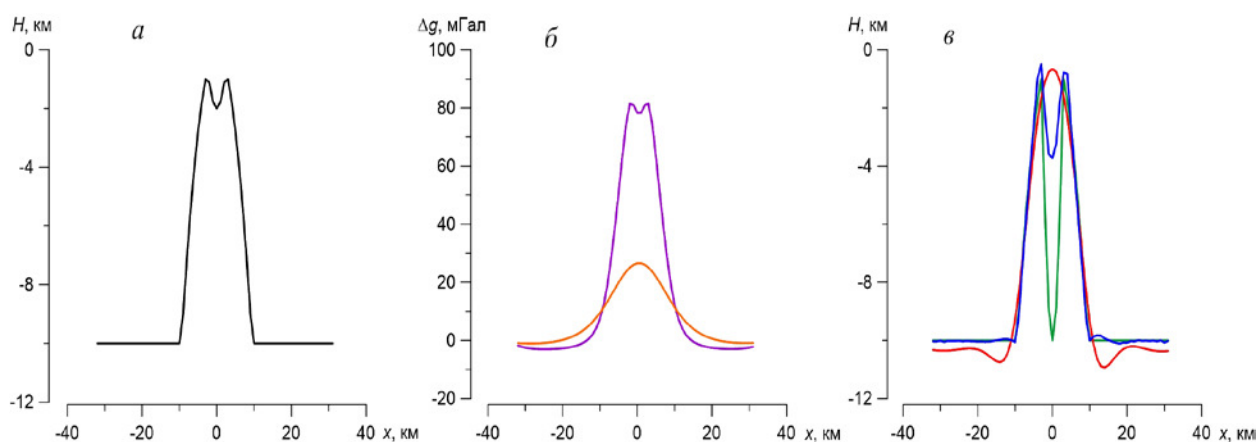


Рис. 1.11. Модельный пример для демонстрации важности выбора начального приближения

**1.3.5. Модифицированный метод локальных поправок.** Положение сейсмических горизонтов земной коры меняются в широких пределах: от сотен метров для осадочного чехла до нескольких десятков километров для подошвы земной коры. И в обратной задаче гравиметрии для многослойных сред (1.48) искомые границы  $z_k^T$  уточненной модели, (впрочем, как и границы  $z_k^0$  модели нулевого приближения) могут быть как приповерхностными, так и глубокозалегающими.

Для глубокозалегающих границ аппроксимация подынтегрального выражения функцией обратных расстояний вполне приемлема. В варианте метода локальных поправок она просто сводится к обратной величине (1.44) аппликат  $z_{ij}^{-1}$  контактной поверхности. Но если какая-либо из границ выходит на дневную поверхность  $z = 0$ , то алгоритм локальных поправок в форме (1.44) утрачивает свое математическое и физическое содержание. Структурные интегралы в (1.48)  $S(z_k^0, z_k^T)$  имеют слабую особенность в точке  $(x = x', y = y', z_k^0 \cup z_k^T = 0)$ . И при расчете поля от приповерхностных границ кубатурная формула (1.43) не применима.

Для модификации вычислительного алгоритма метода локальных поправок мы предлагаем локальную аппроксимацию первообразных уравнения (1.48) по схеме конечных элементов. Та же схема применяется к интегральному оператору на высоте  $\zeta_m \leq 0$ .

Зададим разбиение переменных интегрирования  $(x, y)$  на прямоугольной сетке  $x_i = \xi_i, y_i = \eta_i$ , и на ячейках сетки  $(i, j)$ , как основаниях, построим элементарные параллелепипеды с единичной плотностью и высотой  $\Delta z_k = (z_k^T - z_k^0)$ . Поле криволинейного пласта равно сумме полей от всех элементов разбиения:

$$S(z_k^0, z_k^T) = \sum_{ij} K_{ij}(z_k^0, z_k^T).$$

Для параллелепипеда первообразная  $K_{ij}$  вычисляется в явном виде и, с точностью до гравитационной постоянной  $f$ , равна [Старостенко, 1978; Гравиразведка ... , 1990]:

$$K_{ij}(z_k^0, z_k^T) = -(y - y') \cdot \ln[(x - x') + R] - (x - x') \cdot \ln[(y - y') + R] + z \cdot \arctg \left[ \frac{(x - x') \cdot (y - y')}{z \cdot R} \right] \Bigg|_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \Bigg|_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} \Bigg|_{z_k^0}^{z_k^T} \quad (1.50)$$

где  $R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}$ .

Невязку поля  $Dg$  на дневной поверхности зададим на прямоугольной сетке той же размерности  $(x', y') = (x_{i_0}, y_{j_0})$ :

$$Dg(x_{i_0}, y_{j_0}, 0) = U_{i_0 j_0}.$$

Дискретизация (1.48) на сетке  $(i, j)$  и вычисления первообразной (1.50) для каждого объемного элемента дает систему нелинейных уравнений:

$$\sum_{k=1}^M \Delta \sigma_k \sum_{ij} K_{ij}(z_{ki_0 j_0}^0, z_{ki_0 j_0}^T) = U_{i_0 j_0}. \quad (1.51)$$

Здесь используются обозначения, введенные по аналогии с формулой (1.43); первый из трех нижних индексов трехмерных массивов указывает номер контактной поверхности.

$$z_k(x', y') = z_k(x_{i_0}, y_{j_0}) = z_{ki_0 j_0}.$$

Идея метода локальных поправок приводит к необходимости вычисления поля в эпицентре кубатурных элементов  $(i, j, \Delta z_{ij})$ . Полагая в (1.50)

$$x' = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, y' = \frac{y_j + y_{j+1}}{2},$$

немедленно получаем формулу для ядра итерационной схемы локальных поправок:

$$K_{ij}(z_{kij}^0, z_{kij}^T) = \Delta x \cdot \ln \frac{R + \Delta y/2}{R - \Delta y/2} + \Delta y \cdot \ln \frac{R + \Delta x/2}{R - \Delta x/2} - 4z \cdot \arctg \frac{\Delta x \Delta y}{4zR} \Bigg|_{z_{kij}^0}^{z_{kij}^T}; \quad (1.52)$$

где  $\Delta x, \Delta y$  – шаг по сетке  $(i, j)$  элементов разбиения криволинейной поверхности;  $\Delta x \cdot \Delta y = c$  – площадь основания ориентированного параллелепипеда высотой  $(z_k^T - z_k^0)$ ;

$$R = \sqrt{(\Delta x/2)^2 + (\Delta y/2)^2 + z^2}.$$

Итерационный алгоритм модифицированного метода локальных поправок строится по следующей схеме. Пусть  $\{\Delta z_{kij}^n\}$  – значения искомой функции, уточняющей положение границы нулевого приближения  $z_{kij}^0$  на  $n$ -ом шаге. Сеточное поле  $U_{i_0, j_0}$   $n$ -ого приближения считается по точной формуле (1.51).

$$U_{i_0, j_0}^n = \sum_{k=1}^M \Delta \sigma_k \sum_{i, j} K_{ij} (z_{kij_0}^0, z_{kij_0}^T) = \sum_{k=1}^M \Delta \sigma_k \sum_{i, j} K_{ij} (\Delta z_{kij_0}^n).$$

Следующее  $n+1$  значение приращения аппликат сеточной функции  $\Delta z_{kij_0}^n$  определяет лишь эпицентральные приращения сеточного поля ( $i_0 = i, j_0 = j$ ):

$$\sum_{k=1}^M \Delta \sigma_k [K_{ij} (\Delta z_{kij}^{n+1}) - K_{ij} (\Delta z_{kij}^n)] = U_{ij} - U_{ij}^n.$$

Или, учитывая явный вид ядра (1.52), получаем основную формулу для итерационного процесса модифицированного метода локальных поправок

$$U_{ij} - U_{ij}^n = f \sum_{k=1}^M \Delta \sigma_k \times \left\{ \begin{aligned} & \Delta x \cdot \ln \left[ \frac{(R)_{kij}^{n+1} + \Delta y/2}{(R)_{kij}^{n+1} - \Delta y/2} \right] \left[ \frac{(R)_{kij}^n - \Delta y/2}{(R)_{kij}^n + \Delta y/2} \right] + \Delta y \cdot \ln \left[ \frac{(R)_{kij}^n + \Delta x/2}{(R)_{kij}^n - \Delta x/2} \right] \left[ \frac{(R)_{kij}^n - \Delta x/2}{(R)_{kij}^n + \Delta x/2} \right] - \\ & - 4 \left[ z_{kij}^{n+1} \operatorname{arctg} \frac{c}{4(zR)_{kij}^{n+1}} - z_{kij}^n \operatorname{arctg} \frac{c}{4(zR)_{kij}^n} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1.53)$$

Площадь элементарной ячейки сеточного разбиения  $c = \Delta x \cdot \Delta y$  – это полный аналог коэффициента кубатурной формулы (1.43). Устойчивость вычислительной схемы (1.53) зависит от величины этого коэффициента: чем глубже искомая граница  $z_{ij}$ , тем реже требуется сетка задания поля  $U_{ij}$  и тем больше величина коэффициента  $c$ .

Полагая в (1.53)  $c/4z^2 \ll 1$ , получаем первоначальный вариант метода локальных поправок для глубоко залегающих границ [Пруткин, 1986]:

$$f c \sum_{k=1}^M \Delta \sigma_k \left[ \frac{1}{z_{kij}^{n+1}} - \frac{1}{z_{kij}^n} \right] = U_{ij} - U_{ij}^n. \quad (1.54)$$

Для приповерхностных границ  $c/4z^2 \gg 1$  имеем альтернативную формулу в варианте одномерной модели горизонтально-слоистых сред:

$$2\pi f \sum_{k=1}^M \Delta \sigma_k [z_{kij}^{n+1} - z_{kij}^n] = U_{ij} - U_{ij}^n. \quad (1.55)$$

При вычислении по формуле (1.55) регуляризация не требуется. С уменьшением глубины  $z_{kij}$ , сходимость итерационного алгоритма резко возрастает, а при  $z_{kij}^{n+1} = 0$  итерационный цикл сводится к тривиальному тождеству ( $0 = 0$ ).

Таким образом, модифицированный метод локальных поправок одинаково хорошо работает как в случае больших, так и малых глубин  $z$ . Устойчивость итерационной схемы

(1.53) и (1.54) контролируется величиной параметра регуляризации  $\alpha$ . Его выбор задает адаптивную сетку поля (1.56), построенную на элементах разбиения  $c = \Delta x \cdot \Delta y$ . Чем больше глубина восстанавливаемой границы  $z(x, y)$ , тем больший необходим шаг сеточной аппроксимации. Согласование параметра регуляризации с адаптивным шагом сетки позволяет уменьшить число итераций и сократить время необходимых вычислений.

Формулы (1.54) и (1.55) дают предельные оценки ядра интегрального оператора обратной задачи гравиметрии для модели слоистой среды. Во всех промежуточных случаях для построения алгоритма вычислений следует применять трансцендентную формулу (1.53). Это дает реальную возможность локализовать последовательность уточняющих поправок для глубин плотностных контактов вблизи их «истинных» значений и существенно повысить сходимость и устойчивость итерационной схемы модифицированного метода локальных поправок.

Допустим, что глубинная граница  $z_k^0(x, y)$  ограничена сверху и снизу двумя плоскостями  $z = H_1^k$  и  $z = H_2^k$ . Поле  $U_g(\zeta_k)$  аналитически продолжается вниз до этих глубин и восстанавливается на уровень дневной поверхности. Цепочка трансформаций

$$U_g(0) \rightarrow U_g(\zeta_k) \rightarrow \begin{cases} U_g^1(H_1^k) \rightarrow U_g^1(0) \\ U_g^2(H_2^k) \rightarrow U_g^2(0) \end{cases} \quad (1.56)$$

отфильтровывает локальные аномалии от приповерхностных слоев выше глубин  $H_1$  и  $H_2$ . Поле от слоя  $H_2 - H_1$  вычисляется как разность повысотных трансформант (1.56) на двух уровнях

$$\Delta U = U_g^1 - U_g^2. \quad (1.57)$$

Для небольших высот пересчета длинноволновая составляющая поля протяженных источников меняется незначительно. В разностном поле на двух высотах она практически исчезает (или существенно ослабляется). Поэтому поле от слоя (1.57), вычисленное по разности двух повысотных трансформант, принимается за поле от обособленного плотностного контакта на глубине  $H_1 \leq z(x, y) \leq H_2$ .

Проделав указанную процедуру для всех границ, начиная с верхней, можно разделить аномалии наблюдаемого поля по глубине. И чем дальше разнесены границы, тем ниже погрешность разделения полей. Невязка  $Dg$  между выделенным от слоя наблюдаемым полем и полем границы нулевой модели

$$Dg_k = \Delta U_g^k(0) - f \Delta \sigma_k S_k(z_k^0, z_k^T) \quad (1.58)$$

принимается в качестве целевой функции уточняющего подбора для  $k$ -ой плотностной границы  $z_k^T(x, y) = z_k^0(x, y) + \Delta z_k$ .

Новые положения границ  $z_k^T(x, y)$  находятся в процессе решения полной системы уравнений (1.51). Система решается по итерационной схеме модифицированного метода локальных поправок (1.53) с ограничениями (1.49) – требованием минимального отклонения уточняющих поправок  $\Delta z_k$  от границ  $z_k^0$ , построенных по плотностной модели начального приближения. Вычисляя отклонения «в малом» от начального распределения плотности, можно получить устойчивое и содержательное решение обратной задачи гравиметрии.

## МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ ПЛОТНОСТНОЙ МОДЕЛИ НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

### 2.1. Построение двумерной плотностной модели верхней мантии с учетом условия изостатической компенсации на глубине

**2.1.1. Глубинная изостазия, как элемент плотностного моделирования.** Приведение инструментально измеренных значений силы тяжести к аномалиям Фая (аномалиям в свободном воздухе) фактически решает вопрос о выборе плотностной модели Нормальной Земли – планетарной модели гидростатически равновесного сфероида с эквивалентным распределением масс. Аномалия Фая в топографической редукции, отнесенная к уровенной поверхности геоида эквивалентна аномалии Буге.

Гравитационные аномалии Буге относятся к аномалиям смешанного типа:

$$\Delta g_{\dot{A}} = g - \gamma.$$

Измеренное значение  $g$  редуцируется на поверхность геоида и характеризует распределение масс реальной Земли; нормальное поле  $\gamma$  вычисляется по распределению равновеликих масс с гидростатическим распределением плотности и отнесено к уровенной поверхности эквивалентного сфероида. В региональных задачах гравитационного моделирования, практически не требующих высокоточного уравнивания полей, превышением высот сфероида над геоидом пренебрегают, а смешанную аномалию Буге привязывают к одной и той же уровенной поверхности [Макаров, 1968].

Пусть  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x y z)$  – радиус-вектор точки относительно общего центра масс геоида и сфероида;  $\sigma(\mathbf{r}_p)$  – плотность твердой Земли, занимающей объем  $V$ ,  $\sigma_0(|\mathbf{r}_p|)$  – гидростатическая плотность равновеликого сфероида, зависящая только от расстояния до притягивающего центра. Аномалия Буге на условной уровенной поверхности земли  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_M$ :

$$\Delta g_{\dot{A}}(\mathbf{r}_M) = -f \cdot \frac{\partial}{\partial z_M} \iiint_V \frac{\sigma(\mathbf{r}_p) - \sigma_0(|\mathbf{r}_p|)}{|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_p|} dV_p. \quad (2.1)$$

Интегрирование в (2.1) не распространяется на весь объем геоида  $V$ . Внутренние оболочки Земли близки к состоянию гидростатического равновесия. Ниже астеносферного слоя плотность  $\sigma(\mathbf{r}_p)$  мало отличается от своего гидростатического значения  $\sigma_0(|\mathbf{r}_p|)$ , а оставшиеся «надгидростатические» добавки на глубине не приносят заметных искажений в градиенты приповерхностных аномалий поля. Более действенен гравитационный эффект от распределения масс в вышележащих слоях литосферы. Плотностная модель верхней части литосферы ниже уровенной дневной поверхности – это модель сферoidalного слоя, в котором «надгидростатическое» распределение плотности  $\Delta\sigma = \sigma(\mathbf{r}_p) - \sigma_0(|\mathbf{r}_p|)$  создает расчетное поле гравитационных аномалий. На кровле слоя эти аномалии с некоторой погрешностью совпадают с наблюдаемыми аномалиями Буге; на подошве слоя – близки к нулю [Красовский, 1989]. Отсутствие нижележащих аномалиеобразующих масс и связанных с ними гравитационных эффектов позволяет ограничить



область интегрирования в (2.1) объемом модельного слоя и принять гидростатическое распределение плотности  $\sigma_0(\mathbf{r}_p)$  в подстилающем его субстрате.

При переходе к задачам регионального масштаба сфероидальный сегмент внешней оболочки (литосферы) фактически заменяется моделью плоского слоя. Это наиболее распространенный формат региональных построений [Красовский, 1989; Дружинин и др., 2000; Павленкова и др., 1991; Куприенко и др., 2007; Дружинин и др., 2014]. Соответствующий одномерный аналог нормального распределения плотности в плоском слое  $\sigma_0(z)$  будет зависеть только от глубины. Для конкретной территории параметры одномерной зависимости уточняются по имеющимся данным региональных геолого-геофизических работ. Причем, безусловный приоритет сохраняют сейсмические методы исследований [Павленкова и др., 1991; Романюк, 1995].

Региональные плотностные модели земной коры и верхней мантии (верхней части литосферы) чаще всего имеют форму неограниченного по простиранию пласта с горизонтальными границами обрамления. Такое ограничение является неперенным условием для вычисления гравитационных аномалий от неоднородного слоя с точностью до постоянной составляющей фона. На нижней кромке модельного пласта изменения избыточной плотности приравняются к нулю; соответственно, равны нулю и латеральные вариации литостатического давления [Бызов, Цидаев, 2015]. Постоянная величина литостатического давления на некотором глубинном горизонте означает изостатическую уравновешенность всех вышележащих масс. На Урале первый региональный уровень изостатической компенсации достигается на глубине, порядка 80 км. Этой же отметкой ограничивается глубина модельных сейсмогеологических разрезов Уральского региона [Дружинин и др., 2000; Мартышко и др., 2011]. Условие изостатической компенсации на нижней горизонтальной границе слоя позволяет наметить контуры блоков компенсирующих масс и оптимизировать в них искомое распределение плотности.

**2.1.2. Сейсмоплотностная модель по профилю Кварц.** Мы применили поэтапную методику последовательного построения плотностных моделей мантийных блоков, увязанных с двумерными скоростными разрезами. В качестве примера рассчитан вариант плотностного разреза по фрагменту геотраверса «Кварц» от 48 до 72° в.д., длиной более 1200 км.

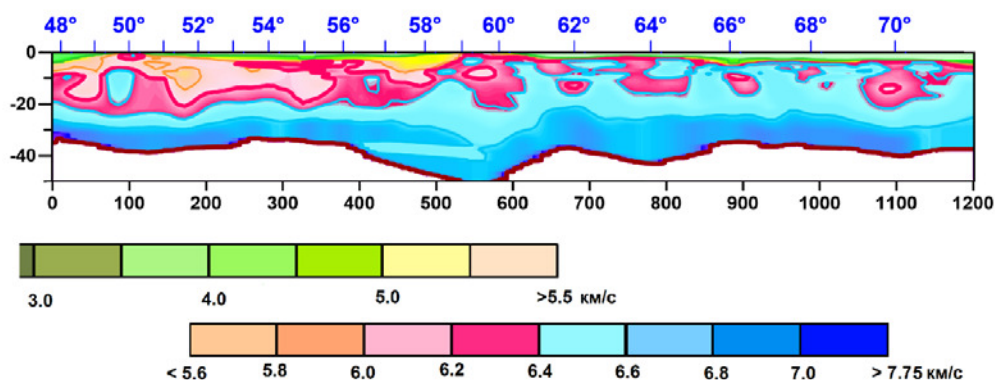


Рис. 2.1. Скоростной разрез по профилю Кварц с нанесенными градусными отметками меридианов. Расстояние вдоль профиля указаны в км

1. По фондовым материалам построено специальное двумерное поле времен по первым вступлениям продольных волн, и способом двумерной сейсмической томографии рассчитана модель скоростного разреза земной коры в координатах  $(x, z)$  (Федорова и др., 2010). Верхняя граница разреза  $z = 0$  (км) выходит на уровень дневной поверхности; нижняя отождествляется с границей Мохоровичича  $M(x, z)$ . Положение границы  $M$  определено по скоростным уровням (7,75–8,25) км/с и затем откорректировано по результатам интерпретации имеющихся данных по отраженным, обменным и преломленным волнам

(рис. 2.1). На разрезе отмечаются существенные латеральные изменения скорости по кристаллическому фундаменту, а наиболее контрастные по упругим свойствам области подчеркивают иерархию неоднородного строения слоисто-блоковой модели земной коры.

2. Начальное распределение плотности по разрезу консолидированной земной коры и осадочного слоя  $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma(x, z)$  строится по двумерной матрице скоростей  $V_p$  продольных волн на основе кусочно-линейной корреляционной зависимости «плотность–скорость», полученной для территории Тимано-Печорской плиты [Мартышко и др., 2012]:

$$\sigma(V) = \begin{cases} 0,113V + 2,034, & 2,35 \leq V < 5 \\ 0,2V + 1,6, & 5 \leq V < 7,75 \end{cases} \quad (2.2)$$

Как правило, расчетное поле консолидированной земной коры соответствует наблюдаемым аномалиям Буге (расхождение, порядка 20 мГал) и повторяет морфологию распределения средней коровой скорости вдоль профиля [Федорова и др., 2010]. Ниже границы М и до глубины 80 км модель дополняется эффективной (постоянной) плотностью с контролирующим ограничением  $\sigma_M \geq 3,3 \text{ г/см}^3$  при  $V_p \geq 8 \text{ км/с}$ . Эти принудительно введенные глубинные массы увеличивают расхождение наблюдаемого и вычисленного полей. Так максимальная невязка полей в этом случае будет составлять более 50 мГал (рис. 2.2).

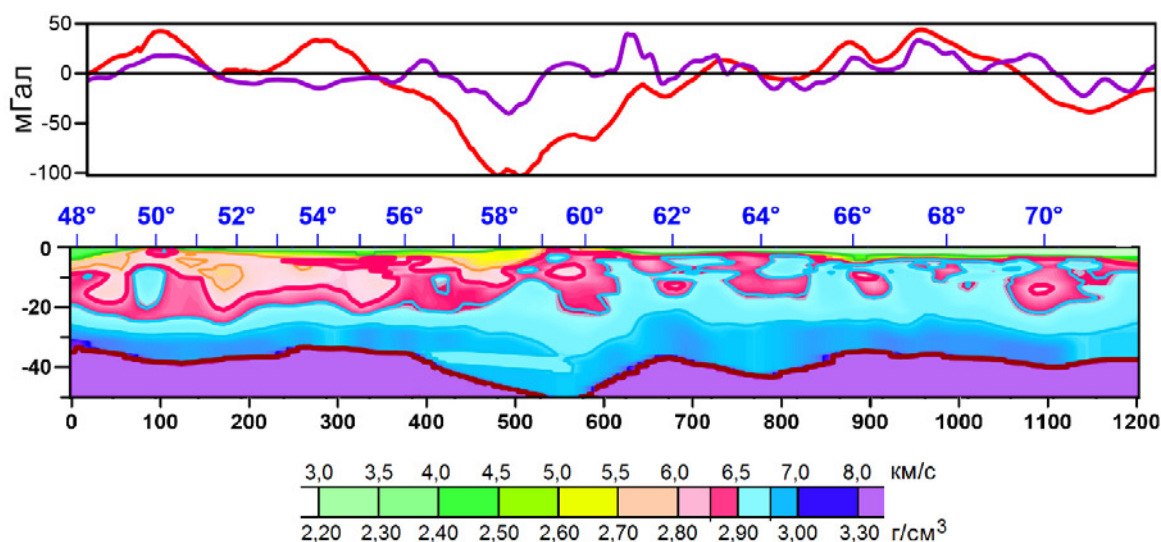


Рис. 2.2. Плотностная модель с однородной мантией по профилю Кварц и графики аномалий гравитационных полей:

наблюдаемого (фиолетовым) и модельного (красным). Цветовая гамма разреза и значения «плотность–скорость» для земной коры соответствуют кусочно-линейной зависимости (2.2)

3. По расширенной (кора + мантия) плотностной матрице  $\sigma(x, z)$  вычисляются значения средних для каждого гипсометрического уровня. Найденные средние значения приравниваются к распределению зависящей только от глубины гидростатической плотности  $\sigma_0(z)$ , относительно которой вычисляется матрица избыточных плотностей  $\Delta\sigma = \sigma(x, z) - \sigma_0(z)$ . По матрице избыточных плотностей рассчитываются аномалии гравитационного поля на уровне дневной поверхности и аномалии масс вертикальных столбов до глубины  $z$ . Последние пересчитываются в аномалии литостатического давления (рис. 2.3) [Красовский, 1989].

Модель с однородной мантией (рис. 2.3, а) порождает столбообразные аномалии литостатического давления ниже границы М; на срезе предполагаемого уровня изостазии 80 км они меняются до 600 бар (рис. 2.3, б). Но на этом уровне латеральных изменений

давления быть не может. Дополнительное граничное условие изостатической уравновешенности на заданной глубине дает возможность при моделировании выделить контуры мантийных блоков и рассчитать искомое распределение плотности компенсирующих масс.

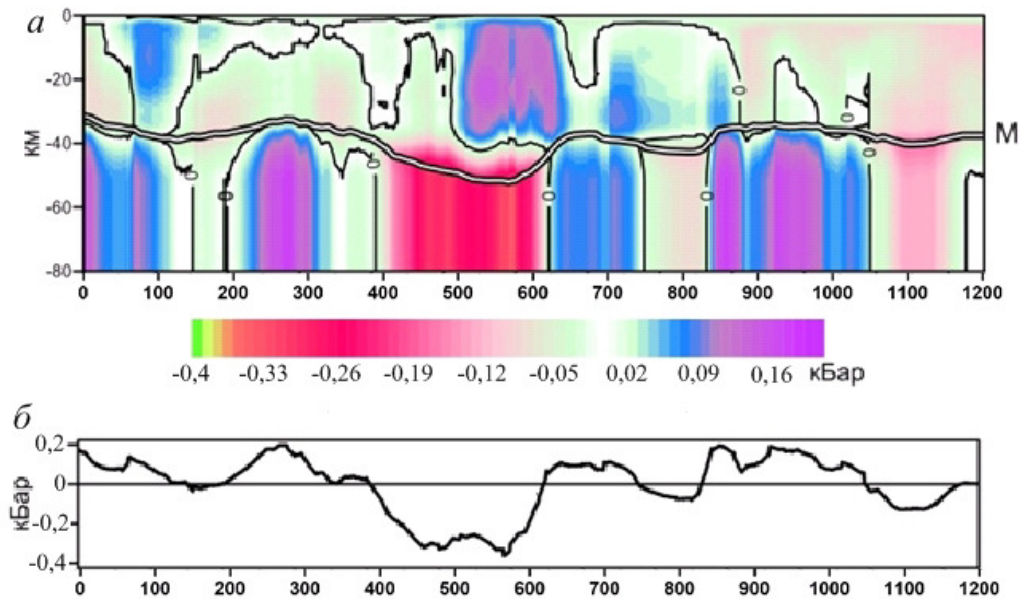


Рис. 2.3. Модель литостатического разреза по профилю Кварц с однородной мантией (двойной черно-белой линией показана граница М):  
 а – распределение по разрезу аномалий литостатического давления  $\Delta P$  (в изолиниях);  
 б – график латеральной изменчивости  $\Delta P$  на предполагаемом уровне изостатической компенсации 80 км (вариации давления  $\Delta P$  – в пределах 600 бар)

#### Выделение блоков в верхней мантии

4. Некоторые предположения о плотности непосредственно подкорового слоя верхней мантии выдвигаются на основе данных об изменении граничных скоростей сейсмических волн на границе М и какой-либо априорной зависимости между скоростью и плотностью. В принятой нами плотностной модели с добавлением однородной мантии расхождение между наблюдаемым и вычисленным полем резко возрастает (см. рис. 2.2). Поэтому логично воспользоваться гипотезой изостазии и скорректировать распределение только мантийной плотности. Если наше предположение окажется верным, то скоростные и дополняющие их плотностные параметры мантийных блоков будут взаимосвязаны.

Аномалии литостатического давления пропорциональны избыточной плотности, так что сейсмо-плотностной разрез для модели с однородной мантией (см. рис. 2.2) легко перестраивается в литостатический. На каждой глубине  $h$  рассчитывается отклонение  $\Delta P(x, h)$  литостатического давления  $P(x, h)$  от его среднего (гидростатического) значения  $\bar{P}(h)$  на том же уровне по формулам [Бызов, Цидаев, 2015]:

$$\Delta P(x, h) = P(x, h) - \bar{P}(h) = g_a \int_h^0 \Delta \sigma(x, z) dz, \quad (2.3)$$

где  $(x, h) = g_a \int_h^0 \sigma(x, z) dz$ .

В пределах данного разреза гидростатическое (т. е. зависящее только от глубины) давление также выражается через усредненные параметры плотностной модели:

$$\bar{P}(h) = \frac{1}{L} \int_0^L P(x, h) dx = \frac{g_a}{L} \int_h^0 \int_0^L \sigma(x, z) dx dz = g_a \int_h^0 \bar{\sigma}(z) dz, \quad (2.4)$$

где  $\bar{\sigma}(z) = \frac{1}{L} \int_0^L \sigma(x, z) dx$

$$\Delta\sigma(x, z) = \sigma(x, z) - \bar{\sigma}(z).$$

В формулах (2.3)–(2.4) приняты следующие обозначения:  $g_a = 9,80665 \text{ м/с}^2$  – среднее значение ускорения свободного падения;  $\sigma(x, z)$  – значение плотности в соответствующей точке профиля;  $L$  – длина профиля,  $\bar{\sigma}(z)$  – среднее значение плотности модели на соответствующей глубине;  $\Delta\sigma(x, z)$  – отклонение плотности от ее среднего значения на глубине.

Поправки, введенные в рамках предположения о частичной изостатической компенсации, позволяют перераспределить плотность в мантии таким образом, чтобы значение избыточного давления на предполагаемом уровне стало близко к нулю. Более жесткие ограничения заданы на глубине полной компенсации: на обрамляющем нижнем горизонте модельного разреза  $h_i = 80 \text{ км}$  латеральных изменений давления быть не может

$$\Delta P(x, h_i) = 0 \quad . \quad (2.5)$$

На рис. 2.4, а построен литостатический разрез по профилю Кварц, с ограничивающим условием (2.5). Перераспределение плотности по глубине за счет введения изостатических поправок является одним из способов определения параметров мантийных блоков по результатам гравитационного моделирования.

Для построения плотностной модели с коррекцией мантийной плотности была введена функция-компенсатор  $\rho(x)$ , которая показывает, какое значение плотности нужно добавить (или вычесть) в слое между границей М и уровнем  $h_i$  чтобы на глубине  $h_i$  выполнялось условие (2.5). Пусть  $\Delta P_{nom}$  и  $\Delta\sigma_{nom}$  – отклонения литостатического давления и плотности от их средних значений на глубине для модели с однородной мантией, тогда при изменении плотности в мантии на  $\rho(x)$  аномальное литостатическое давление на глубине  $h_i$  в модели с компенсацией будет равно:

$$\Delta P(x, h_i) = \Delta P_{nom}(x, h_i) - g_a(h_m(x) - h_i)\rho(x),$$

где  $z = h_m(x)$  – уравнение границы М.

Из условия (2.2):

$$\rho(x) = \frac{\Delta P_{nom}(x, h_i)}{g_a(h_m(x) - h_i)} = \frac{1}{(h_m(x) - h_i)} \int_{h_i}^0 \Delta\sigma_{nom}(x, y) dy \quad .$$

На рис. 2.4, б построен график латеральной изменчивости компенсирующих добавок к постоянной плотности ниже границы М. Как видим, получившееся распределение плотности весьма неоднородно и никак не соотносится с геофизическими моделями глубинного строения верхней мантии. Чтобы устранить это несоответствие ограничение (2.5) было несколько ослаблено: ниже границы М вертикально расслоенная модель была разбита на несколько блоков, внутри которых было проведено усреднение плотности. X-координаты разбиения выбирались по нулям и экстремумам функции  $\rho(x)$  с тем расчетом, чтобы получившиеся блоки не имели слишком малую протяженность вдоль профиля. При помощи усредненной таким образом  $\rho(x)$  была построена блочная модель верхней мантии



(рис. 2.4, *с*). Для данного профиля контуры мантийных блоков хорошо коррелируются с граничными скоростями головных волн по кровле мантии.

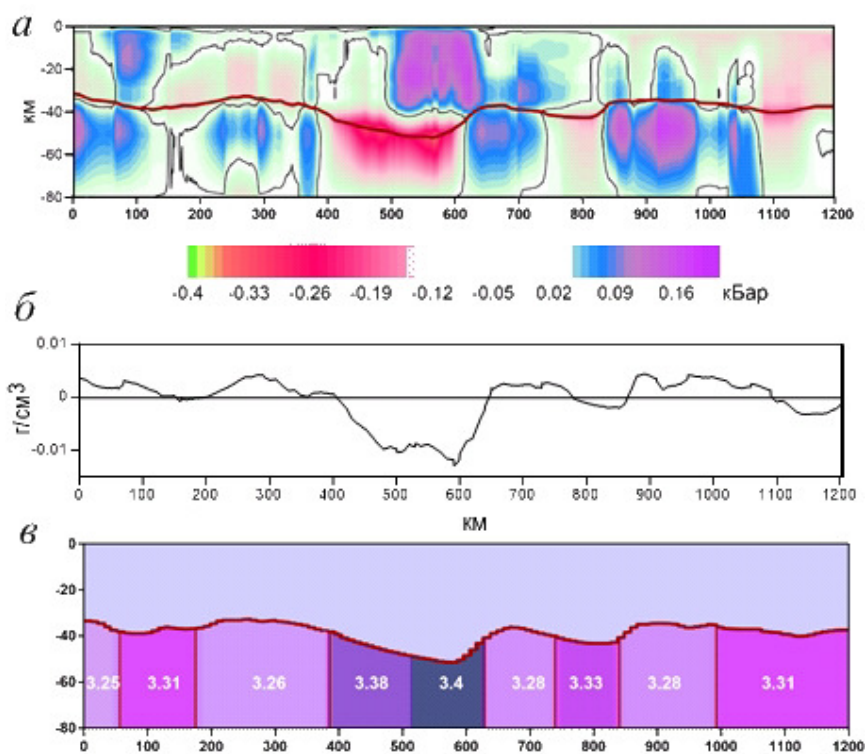


Рис. 2.4. Литостатический и плотностной разрез с подобранными мантийными блоками:  
*a* – в изолиниях изостатических аномалий литостатического давления  $\Delta P = P - P_{ср}$ ;  
*б* – график функции-компенсатора  $\rho(x)$ ;  
*с* – блочная модель (вариации давления  $\Delta P$  на глубине 80 км – в пределах 80 бар)

При постоянной (вычисленной) плотности в блоках верхней мантии нарушается жесткое граничное условие (2.5) полной изостатической компенсации. На подошве частично скомпенсированного слоя земной коры и верхней мантии ( $h = 80$  км) вариации литостатического давления  $\Delta P$  не превышают 80 бар. Малоамплитудные, но довольно резкие изменения остаточных аномалий  $\Delta P(x, h_i)$  говорят о том, что соседние блоки в мантии, скорее всего, не имеют четко выраженных вертикальных границ, а сопредельные контактирующие области должны обладать непрерывной, хотя и сильно градиентной структурой.

5. Корректность расчётов изостатической компенсации в мантии подтверждается результатами гравитационного моделирования. Сравнительно с моделью однородной мантии (см. рис. 2.2), плотностной разрез, дополненный мантийными блоками (см. рис. 2.4, *с*) намного лучше согласуется с аномалиями гравитационного поля. В этом случае отклонение расчетного поля от наблюдаемого уменьшается почти в два раза до 20 мГал. В разностном поле практически отсутствует длинноволновая составляющая региональных аномалий. Коротковолновая часть невыбранных остатков свидетельствует о неучтенных локальных неоднородностях в земной коре.

Разностное поле выбирается сингулярными источниками [Цирульский и др., 1980], локализованными в земной коре (рис. 2.5, *а*). Мы предпочли некий оптимальный вариант, обеспечивающий невязку в аномалиях Буге порядка 10 мГал. Из-за небольших размеров и малых дефектов плотности локальные тела не приносят заметных искажений в глубинные аномалии литостатического давления. Так на нижнем горизонте предполагаемой частичной изостатической компенсации латеральное изменение давления практически осталось в тех же пределах – около 80 бар (рис. 2.5, *б*).

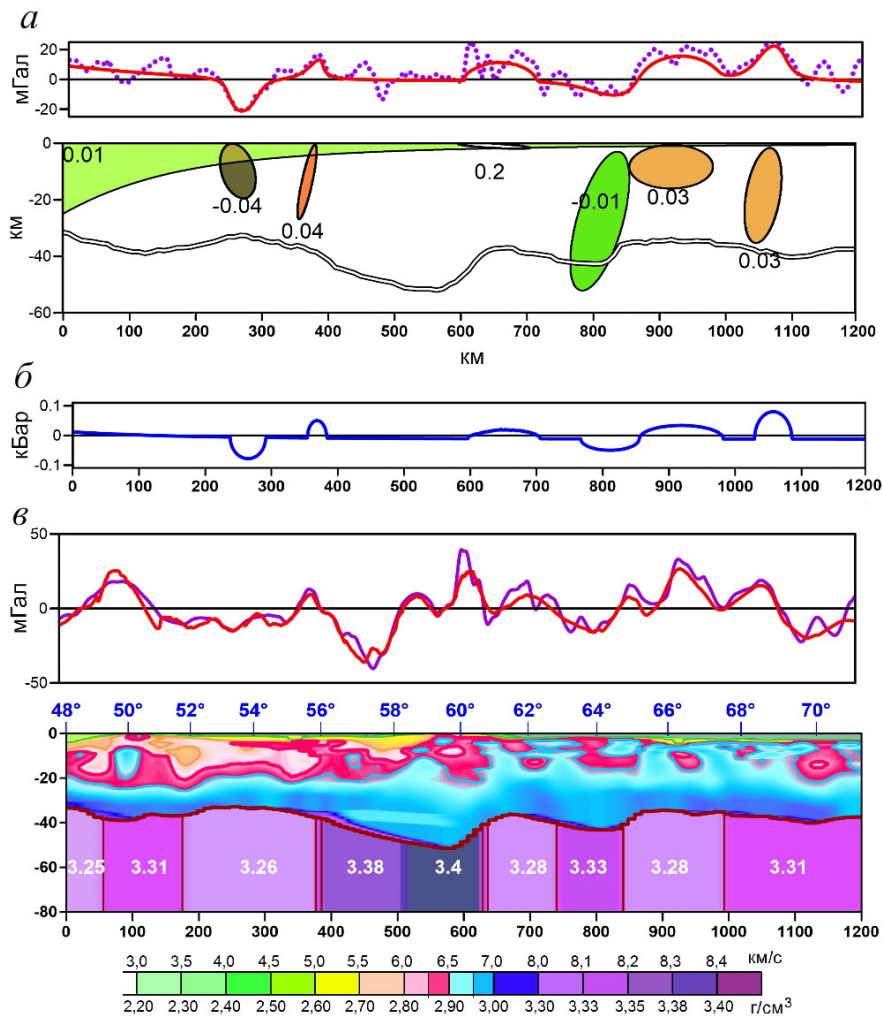


Рис. 2.5. Результирующая слоисто-блоковая сейсмоплотностная модель по профилю Кварц:  
*а* – поле невыбранных остатков;

*б* – модель с источниками локальных аномалий в земной коре по А.В. Цирульскому;  
*в* – оптимальная модель подбора с невязкой аномалии Буге порядка 10 мГал (наблюдаемое поле – фиолетовый цвет, результирующее модельное – красный) и с вариацией давления в пределах 80 бар на нижней кромке разреза.

Шкала соответствия плотностных и скоростных параметров дополнена мантийными значениями

Результирующая слоисто-блоковая сейсмоплотностная модель по профилю Кварц показана на рисунке (рис. 2.5, *в*). Решением прямой задачи гравиметрии можно добиться незначительной корректировкой плотности в коре и блоках верхней мантии и обеспечить минимизацию как по отклонению в аномалиях Буге, так и по вариации давления на изостатическом уровне. Невязка в гравитационных аномалиях Буге рассчитывается на уровне дневной поверхности; невязка в отклонениях литостатического давления от среднего – на глубинном уровне изостатической компенсации. Своеобразное проявление разделенных по глубине аномальных масс в полях различной природы (гравитационном и литостатическом) позволяет сделать процесс раздельного подбора итерационным. А за счет перераспределения компенсирующих масс по всей толще модельного разреза добиться совпадения полей с любой наперед заданной степенью точности.

Таким образом, разработанная методика двумерного гравитационного моделирования позволяет учесть основные структурные особенности сейсмической модели разреза; учитывать различную априорную информацию (структурные границы, начальное распределение плотности, ограничения на него накладываемые); добиться хорошего соответствия наблюдаемого и модельного гравитационных полей; выполнять устойчивый подбор плот-

ностей для большого числа блоков; изменять блочную структуру модели ниже определенной границы, исходя из условия изостатического равновесия на заданной глубине, и в достаточной степени уменьшить аномалии литостатического давления на ней. Все разработанные алгоритмы реализованы в прикладных программах для современных вычислительных систем. Для разреза по профилю Кварц построена модель распределения плотности, в которой выбором конфигурации блоков верхней мантии удалось с хорошей точностью выполнить условие изостатического равновесия на глубине 80 км. Эта методика была применена для построения сейсмоплотностных моделей вдоль других геотравверсов.

**2.1.3. Скоростные модели по сейсмическим профилям.** В качестве исходной информации нами были использованы материалы сейсмических исследований, выполненных Центром региональных геофизических исследований «Геон» и Баженовской геофизической экспедицией БГЭ ПГО Уралгеология. Территория исследования, площадь которой около полутора миллионов квадратных километров, находится в пределах географических координат 60–68°с.ш., 48–72°в.д. и охватывает приарктическую часть сочленения важнейших геологических провинций России: северо-восточную окраину Восточно-Европейской платформы, Тимано-Печорскую плиту, северную часть Уральской складчатой системы и северо-западный сектор Западной Сибири. Геологическая изученность и современные представления о развитии Урала учитывались в рамках структурных схем тектонического районирования Урала и прилегающих к нему платформ [Карта поверхности ... , 2000]. На рис. 2.6 приведен фрагмент карты аномалий гравитационного поля в редукции Буге, в сопоставлении с тектонической схемой районирования Урала по границам структур 1-го порядка [Соболев, 1968; Соболев и др., 1983; Сурков, Жеро, 1993; Тимонин, 1998; Костюченко и др., 2012].

В пределах этой территории выполнен значительный объем сейсмических работ с использованием комбинированной системы наблюдений ГСЗ, МОБЗ и регистрацией преломленных, отраженных и обменных головных волн (см. рис. 2.6, а, б). Разрезы земной коры, приведенные в первых и многочисленных последующих публикациях, построены с использованием традиционных схем интерпретации в виде слоисто-блоковых моделей. На разрезах, как правило, показаны сейсмические границы с оценкой граничных и внутрипластовых скоростей (внутри пластов средняя скорость определена по отраженным волнам). К сожалению, как граничные, так и пластовые скорости указаны не равномерно по разрезу, а в зависимости от плотности систем наблюдений и качества отраженных волн [Егоркин, 1991; 2000]. К мешающим факторам следует отнести разнородность информации, обусловленную различием методик получения и интерпретации исходных данных для дискретной неравномерной сети сейсмических регистраторов и редкой системы источников возбуждения волновых полей. Значительно осредненный характер отфильтрованной информации задает допустимый масштаб сейсмических построений и контролирует значимость геометрических размеров и упругих параметров слоисто-блоковой конфигурации для модели земной коры.

В целях получения более полной информации о распределении скоростных параметров в земной коре выполнена переобработка материалов ГСЗ по способу двумерной сейсмической томографии [Мишенькина и др., 1983; Сурков и др., 2000; Кузнецов и др., 2010]. Данный способ подразумевает построение по отдельным годографам дифференциальных зондирований непрерывного двумерного поля времен, что позволяет в каждой точке профиля иметь полный набор времен прихода упругих волн для разных удалений от источника и, соответственно, возможность непрерывного вдоль профиля определения скоростных параметров на разных глубинах [Крылов и др., 1993]. Метод решения обратной кинематической задачи для двумерных полей времен рефрагированных волн предложен в работе [Мишенькина и др., 1983]. Алгоритм решения обратной задачи и вычисление массива значений скорости распространения упругих волн  $V(x,z)$  реализованы в программе «Invers».

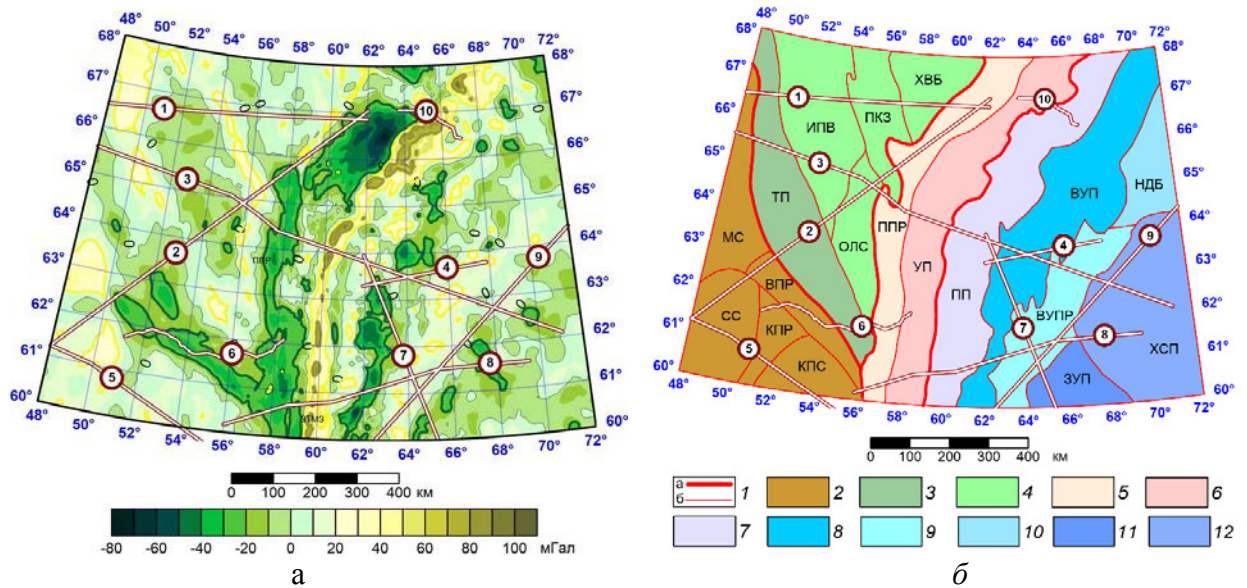


Рис. 2.6. Карта аномалий гравитационного поля (а) и положение профилей ГСЗ-МОВЗ на тектонической схеме Урала и его платформенного обрамления (б):

Геотранверсы и профили ГСЗ, МОВЗ (оконтуренные номера): Агат-2 (1), Глобус (2), Кварц (3); Верхненильдино–Казым (4), Рубин-1 (5), Сыктывкарский МОВЗ (6), Северная Сосьва–Ялуторовск (7), Красноленинский (8), Гранит–Рубин-2 (9), Полярно-Уральский трансект (10).

Тектоническая схема: 1 – обобщенные границы надпорядковых структур (а), границы структур первого (и второго) порядка (б);

2 – **Восточно-Европейская платформа (ВЕП)** в составе: Мезенской синеклизы (МС), Вычегодского прогиба (ВПР), Сысольского свода (СС), Кожимского прогиба (КПР), Коми-Пермяцкого свода (КПС);

**Тимано-Печорская плита (ТПП)** в составе (3–4): 3 – Тиманское поднятие (ТП); 4 – Печорская синеклиза (ПС) в составе: Ижма-Печорской впадины (ИПВ), Печоро-Колвинской зоны (ПКЗ), Хорейверского бассейна (ХВБ), Омра-Лузской седловины (ОЛС);

**Уральская складчатая система (УСС)** в составе (5–6): 5 – Предуральский краевой прогиб (ППР); 6 – Уральское поднятие (УП);

**Западно-Сибирская плита (ЗСП)** в составе (7–11): 7 – Приуральское погружение (ПП); 8 – Восточно-Уральское поднятие (ВУП); 9 – Восточно-Уральский прогиб (ВУПР); 10 – Зауральское поднятие (ЗУП); 11 – Хантымансийское срединное поднятие (ХСП);

12 – Надымский блок

Первые результаты сейсмо-томографической исследований в этом направлении опубликованы в работах: [Дружинин, Карманов, 1985; Дружинин и др., 1990]. Учитывались данные по профилям, отработанных с использованием комбинированной системы наблюдений ГСЗ и МОВЗ с регистрацией отраженных, головных, преломленных и обменных волн.

Все скоростные разрезы дополнены границей Мохо, положение которой определено по скоростным уровням (7,75–8,25) км/с и затем откорректировано по результатам интерпретации имеющихся данных по отраженным, обменным и преломленным волнам. Погрешность построения скоростных разрезов оценивалась при сопоставлении их в местах пересечения профилей. Поправки, введенные в рамках предположения об изостатической компенсации, позволяют перераспределить плотность в мантии таким образом, чтобы значение избыточного давления на заданной глубине стало близко к нулю.

На рис. 2.7 и 2.8 представлены двумерные сейсмоденситные модели начального приближения земной коры и верхней мантии до глубины 80 км. Расчетное гравитационное поле моделей сопоставлено с наблюдаемыми аномалиями Буге. Морфологическое сходство двух кривых вполне приемлемо на качественном уровне интерпретации.



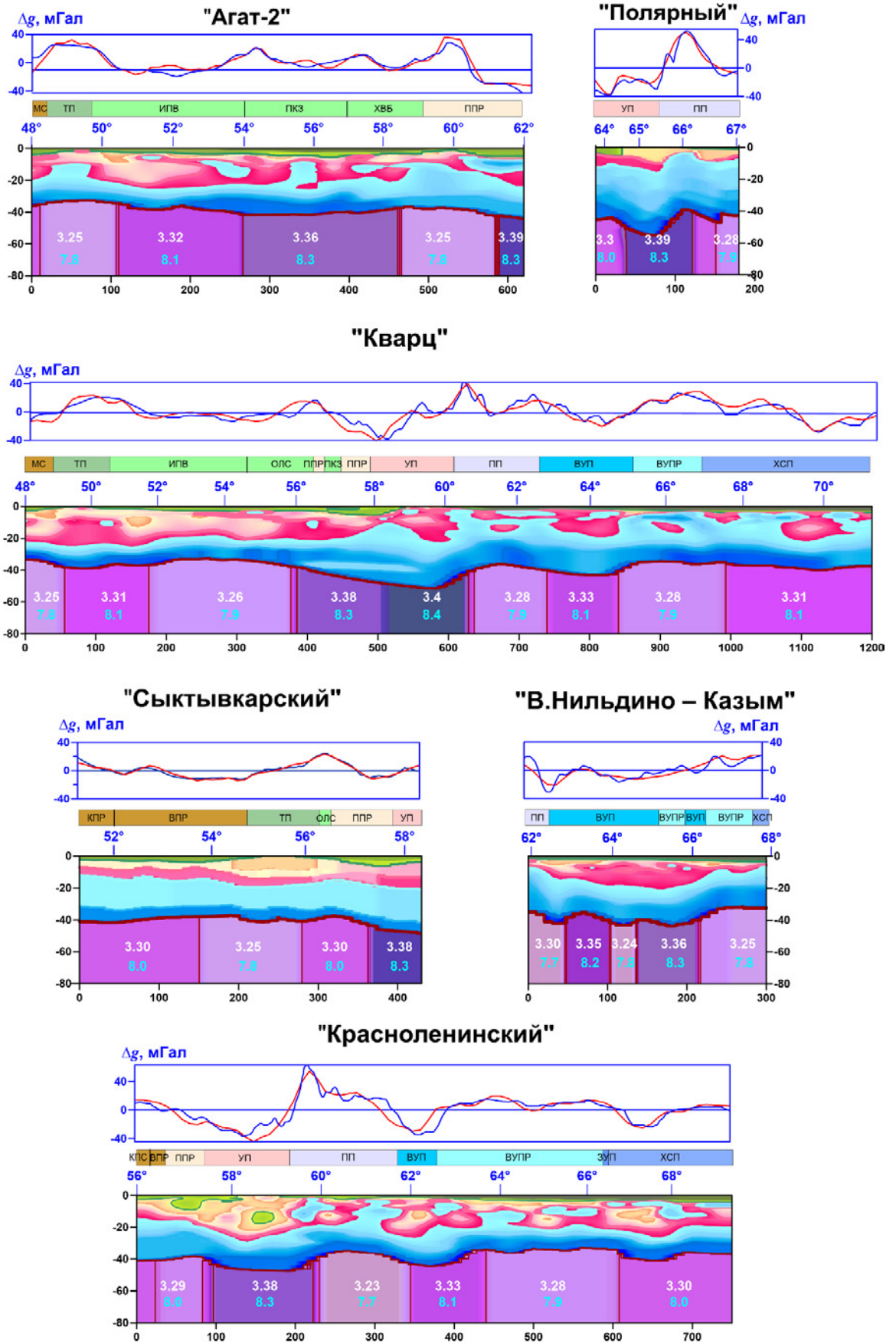


Рис. 2.7. Сейсмоплотностные разрезы по профилям ГСЗ, МОЗ до глубины регионального уровня изостатической компенсации. Над разрезами показаны тектонические структуры, вынесенные на профили в соответствии с цветовой шкалой на рис. 2.6 (разрезы составлены В.В. Колмогоровой)

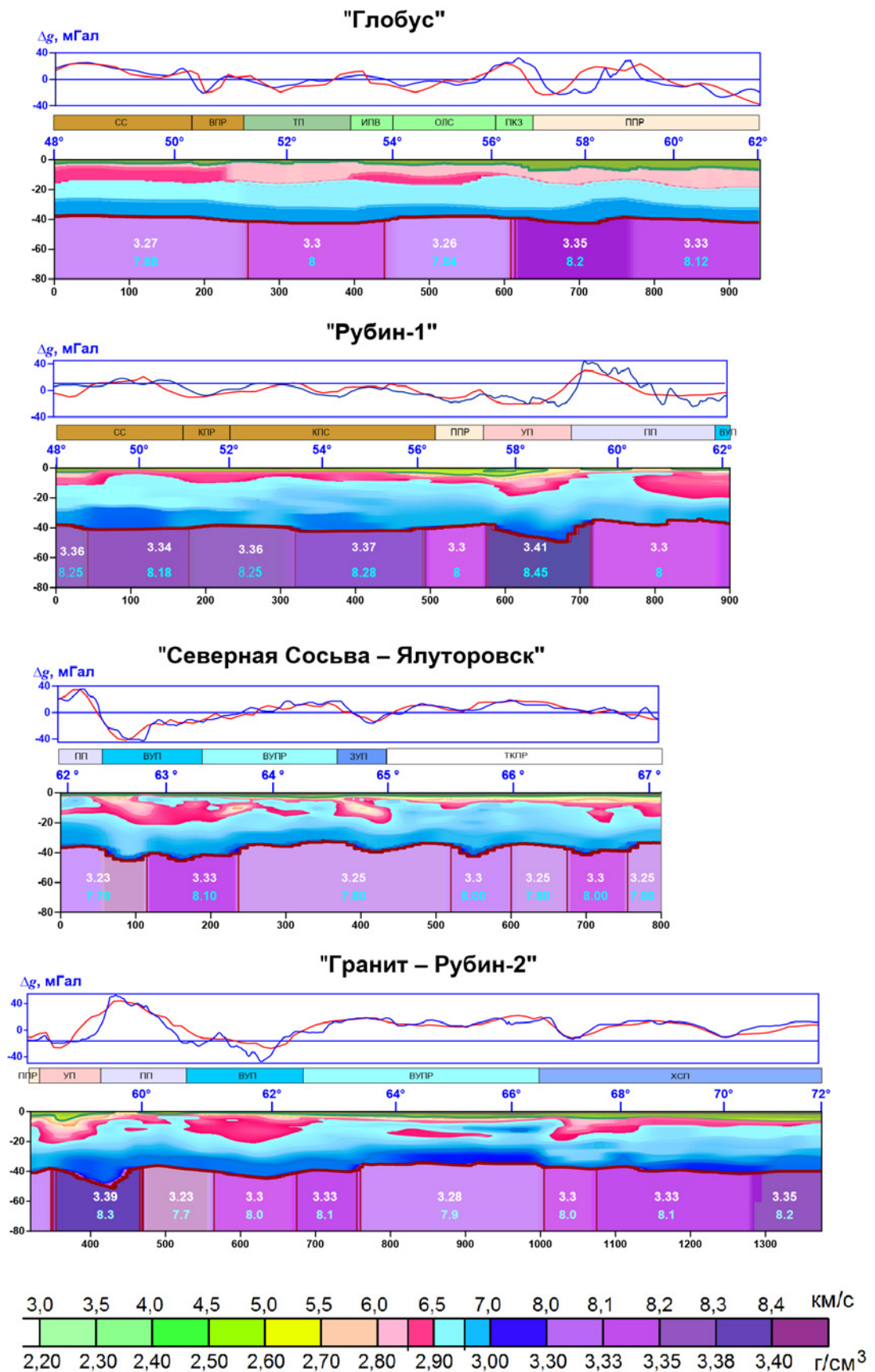


Рис. 2.8. Сейсмоплотностные разрезы по профилям ГСЗ, МОВЗ. Под разрезами указана шкала соответствия плотностных и скоростных параметров, согласно линейной регрессии эмпирических данных на рис. 2.9 (разрезы составлены В.В. Колмогоровой)

## Выводы

Преобразования форматов цифровых файлов и сопутствующие им вычислительные алгоритмы на много сократили затраты на предварительную обработку двумерных плотностных моделей и сделали возможным использовать интерактивную схему метода подбора для решения обратной задачи гравиметрии в реальном режиме времени.

Предварительные оценки распределения мантийной плотности (и, соответственно, скорости) можно получить, используя построенные выше градиентные скоростные модели земной коры. Конструктивным параметром оценки послужили аномалии литостатического давления на предполагаемом глубинном уровне изостатической компенсации.

Результаты сейсмоплотностного экспресс – моделирования по сеточной технологии позволили уже на этапе построения моделей начального приближения выделить ряд характерных особенностей в распределении взаимоувязанных плотностных и скоростных параметров в земной коре и верхней мантии в зоне сочленения Северного Урала и Тимано-Печорской плиты.

На сейсмических разрезах выделены опорные границы, характеризующие поверхность фундаментов под осадочными бассейнами, подошву земной коры (границу Мохоровичича), а также внутрикоровые поверхности. По характерному скачку сейсмических и плотностных параметров построены более детальные карты поверхностей фундамента и Мохоро, а также базальтового слоя для всей приарктической части Уральского региона. Кроме того, полученные разрезы использованы в дальнейшем для построения начальной модели объемного распределения плотности для трехмерного гравитационного моделирования на сетках большой размерности.

## 2.2. Построение трехмерной гравитационной модели начального приближения

**2.2.1. Трехмерная модель интерполированной плотности.** Наиболее ценными для трехмерного гравитационного (и магнитного) моделирования являются первичные данные сейсмических исследований (и, в первую очередь, ГСЗ) о распределении коровых скоростей по всей совокупности представленных разрезов. Метод позволяет оценивать упругие параметры земной коры и расчленять среду на слои и блоки по их усредненным значениям.

Переход от скоростных к плотностным разрезам осуществляется по полуэмпирической зависимости «плотность–скорость» (рис. 2.9). Известно, что соотношение физических параметров между плотностью и скоростью продольных волн для пород консолидированной земной коры может быть представлено кусочно-линейной регрессионной зависимостью.

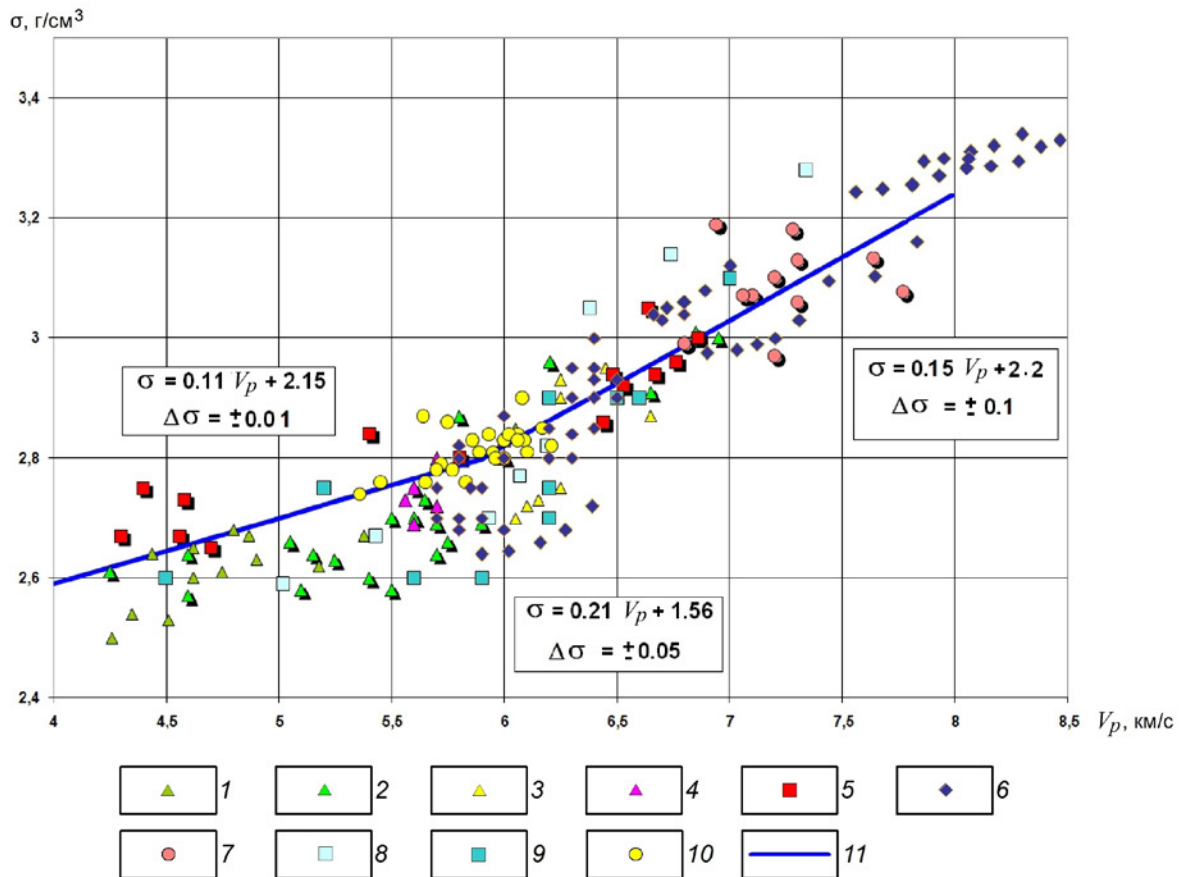


Рис. 2.9. График зависимостей «плотность–скорость»  $\sigma = f(V_p)$ , построенный по результатам петрофизических исследований на образцах горных пород:

1 – Звягинцев, 1977 – граниты и грано-диориты; 2 – Рабинович, 1978 – данные акустического каротажа; 3 – Карус, 1977 – данные для пород архейского возраста по разрезу Миннибаевской скважины (Татарский свод); 4 – Стародубровская, 1980 – данные по породам зоны оруденения медно-колчеданного месторождения Южного Урала; 5 – Алейников, 1982 – данные по метаморфическим породам уральского региона; 6 – Галдин, 1970 – данные для Кольского региона по породам от кислого до ультраосновного состава при давлении 1, 2, 5, 10, 20 кБар; Галдин, 2000 – данные по Кольской СГ-3, по породам Печенгского эффузивно-осадочного комплекса преимущественно среднего и основного состава и архейского кристаллического фундамента; 7 – Афанасьев, 1976 – данные по основному и ультраосновным породам Воронежского кристаллического массива; 8 – Халевин, 1985 – данные по Уралу и Казахстану по литотипам пород: известняки, аргиллиты, сланцы, граниты, гнейсы, пироксениты, перидотиты и данные по ВКМ; 9 – Халевин, 1986 – данные по образцам из района СГ-4 преимущественно среднего и основного состава; 10 – Блинецов, 2000 – данные по СГ-4 по эффузивно-осадочным породам преимущественно среднего и основного состава (андезитобазальты); 11 – Дружинин и др., 1982 – эмпирическая зависимость «скорость–плотность» для средних и основных пород Уральского региона

Несмотря на то, что коэффициенты такой зависимости для различных регионов будут несколько отличаться [Красовский, 1989], сохраняется общая тенденция монотонного увеличения плотности пород по мере роста скорости распространения упругих волн. Плотность, как и скорость, лишь частично отражает петрохимический состав и физико-механическое состояние пород в естественном залегании. Стохастическая связь между двумя случайными переменными находится по ограниченной выборке образцов горных пород. Для монотипных коллекций из одного района опробования она представляется значимой [Семенов, 1993]. Для разнородных коллекций величина статистической погрешности возрастает в несколько раз [Афанасьев, 1976; Халевин и др., 1986]. Линейная регрессия не регламентирует взаимно однозначного соответствия «плотность–скорость». В рамках доверительного интервала возможна корректировка приращения обеих случайных величин как в сторону больших, так и меньших значений. Любое из них будет равновероятным. Тем более, что для различных геологических провинций указанные зависимости должны значимо различаться.

Для успешной разработки эффективных алгоритмов трехмерного плотностного моделирования требуется специальная организация 2D-данных по сейсмическим разрезам. Один из возможных вариантов – привязка разномасштабных разрезов (допустимы разрезы и различной глубины) на единый координатный цифровой планшет, например, планшет карты аномалий гравитационного поля, с последующей интерполяцией двумерных плотностей в межпрофильное пространство. Это предполагает преобразование двумерного распределения плотности вдоль профильных сечений в формат трехмерных сеточных функций. Инструментом технологической поддержки является лицензионный пакет Golden Software программ «Grafer», «Surfer» и «Voxler».

Граничные файлы формата «.bln» задают положение каждого из профилей на цифровом планшете карты гравитационного поля. Им сопоставляется набор стандартных сеточных файлов формата «.grd» двумерных плотностных моделей. Таким образом учитывается взаимное расположение разрезов в пространстве, и происходит переход от двумерного массива координат вдоль профильных сечений (с учетом их кривизны) к трехмерному координатному массиву объемной модели. Программа визуализации экспортирует данные как трехмерный «грид-файл» пакета Voxler и восстанавливает пространственную геометрию профильных сечений (рис. 2.10).

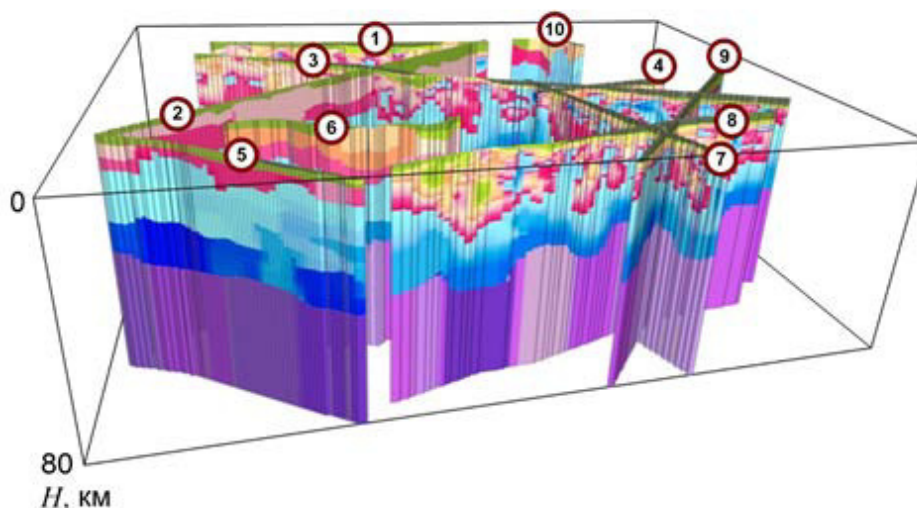


Рис. 2.10. Пространственное положение плотностных разрезов на координатном цифровом планшете исследуемой территории:

- 1) Агат-2; 2) Глобус; 3) Кварц; 4) Верхне-Нильдино – Казым; 5) Рубин-1; 6) Сыктывкарский;
- 7) Нижняя Сосьва – Ялуторовск; 8) Красноленинский; 9) Гранит – Рубин-2;
- 10) Полярный Уральский трансект



Далее происходит процесс заполнения ячеек сеточного куба интерполированными значениями плотности по алгоритму программы «PLANSHET» [Цидаев, 2011]. Было решено использовать три интерполяционные схемы пакета «Surfer»: метод ближайших соседей, метод обратных расстояний с большим (3 и более) степенным показателем и метод триангуляции с линейной интерполяцией. Первые два метода сориентированы на восстановление пространственного положения компактных объектов, третий – на обрисовку протяженных линейных структур по их профильным подсечениям. Интерполяция выполняется по отдельным горизонтальным слоям. Мощности слоев определяются шагом дискретизации по оси глубин, количество слоев – на единицу меньше количества дискретов разбиения. Результатом работы программы интерполяции является пакет сеточных «грид-файлов», содержащих горизонтальные слои четырехмерного  $(x, y, z, \sigma)$  куба, и XML-файл, в котором каждому слою сопоставлена глубина, на которой он расположен:

$$\sigma(x, y, z) := \left\{ \sigma_k(x, y); z \in (z_{k-1}, z_k]; k = \overline{1, N} \right\}.$$

Построенный «цифровой куб» на рис. 2.11 представляет собой трехмерную плотностную модель начального приближения для заданного участка площади и доступен для редактирования с возможностью получения информации по любому сечению вдоль образующей кривой граничного файла в формате «.bln». На его основе возможно построение карт горизонтальных срезов и структурных карт рельефа опорных плотностных границ.

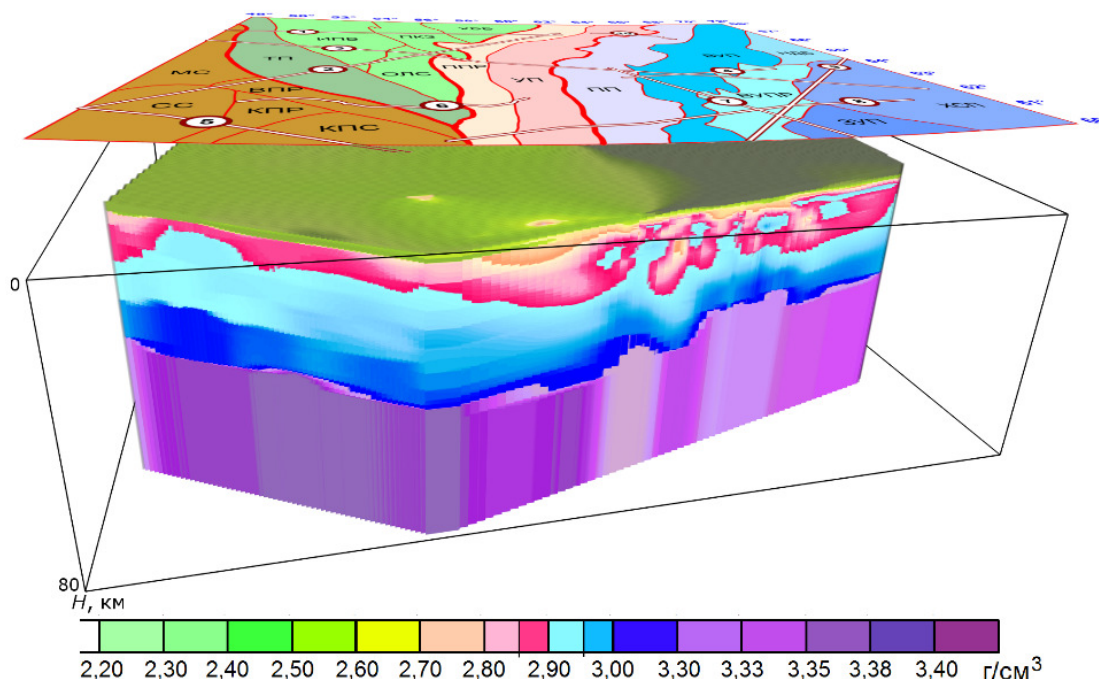


Рис. 2.11. Плотностная 3D модель начального приближения, полученная интерполяцией плотностей двумерных разрезов в межпрофильное пространство; сверху размещена схема районирования территории

**2.2.2. Трехмерная гравитационная модель начального приближения.** Использование двумерных плотностных моделей для перехода к трехмерной конфигурации не требует высокоточного подбора гравитационного поля по отдельно взятым профилям. Вполне достаточно качественного совпадения расчетного поля разреза с реальной проекцией на профиль

трехмерных аномалий наблюдаемого поля. Важно другое. При объемном моделировании интерпретатор решает две принципиальные задачи: корректное восстановление формы основных аномалиеобразующих объектов в межпрофильном пространстве и устранение краевого эффекта затухания 3D-модельного поля за пределами исследуемого региона.

В силу объективной ограниченности информационной базы геолого-геофизических данных невозможно воссоздать реальную конфигурацию аномальных объектов в трехмерном пространстве по разрозненным профильным подсечениям. Как следствие, неизвестны и поправки в гравитационный эффект за трехмерное распределение плотности. Для изометрических тел приповерхностного залегания этот поправочный коэффициент весьма значителен. Так в ходе вычислительных экспериментов для моделей глубинного строения земной коры северо-восточной части Восточно-Европейской плиты [Костюченко, Романюк, 1997] и северной части Среднего Урала [Дружинин и др., 2000] установлено, что поправка в гравитационный эффект за трехмерность модельных объектов достигает на некоторых профилях 100 и более процентов. Хотя подобные количественные оценки, на наш взгляд, кажутся несколько завышенными, подобное обстоятельство требует ревизии устоявшейся методики трехмерного моделирования с использованием профильных данных.

Аномальные гравитационные эффекты вычисляются на уровне фонового поля «нормальной» модели, плотность которой считается постоянной. Это либо нулевая [Страхов, Романюк, 1984; Романюк, 1995], либо средневзвешенная [Дружинин и др., 2009], либо максимальная плотность мантийных блоков [Куприенко и др., 2010]. В таком случае игнорируется постоянная составляющая расчетного уровня поля и возникает проблема сопоставления разноглубинных сегментов сводной плотностной модели. Для исключения краевого эффекта затухания фонового поля необходимо адекватное пространственное продолжение аномалиеобразующих масс за внешние границы модельной области. Один из способов продолжения – увеличение длин расчетных профилей для двумерных плотностных моделей [Дружинин и др., 2000]. Если доступна информация для более обширного региона, то это снимает часть вопросов, хотя и значительно увеличивает объем подготовительных вычислений. Однако удлинение профилей не решает проблему в трехмерном варианте. В условиях практического отсутствия информации о глубинном строении необходимо выполнить параметризацию масс законтурных блоков с привязкой к профильным значениям. Подобная процедура трудно формализуема и, даже в случае ее успешной реализации, приводит к перекосу фонового поля и образованию ложных краевых аномалий по контуру модельного планшета.

Корректное решение трехмерной задачи гравитационного моделирования требует обязательного учета единого (переменного) регионального гравитационного фона для всей территории исследования. Послойная организация сеточных «грид-файлов» интерполированной плотности позволяет автоматизировать алгоритм требуемых вычислений. В качестве фоновой плотности «нормальной» модели плоского слоя принимается плотность, зависящая только от глубины. Ее можно получить, усредняя сеточные функции интерполированной плотности по каждому слою цифрового «куба». Такую плотность условно можно назвать «гидростатической». Для каждого гипсометрического уровня  $z_k$  по плотностной матрице  $\sigma_k(x, y)$  вычисляются значения средних  $\sigma_{0k}$ . Полученная совокупность средних  $\sigma_{0k}$  приравниваются к распределению зависящей только от глубины гидростатической плотности  $\sigma_0(z)$ , которая и принимается за плотность относимости нормальной модели.

На рис. 2.12 показан закон изменения с глубиной минимальных, средних и максимальных значений плотности, рассчитанных по слоям цифрового куба 3D плотностной модели начального приближения.

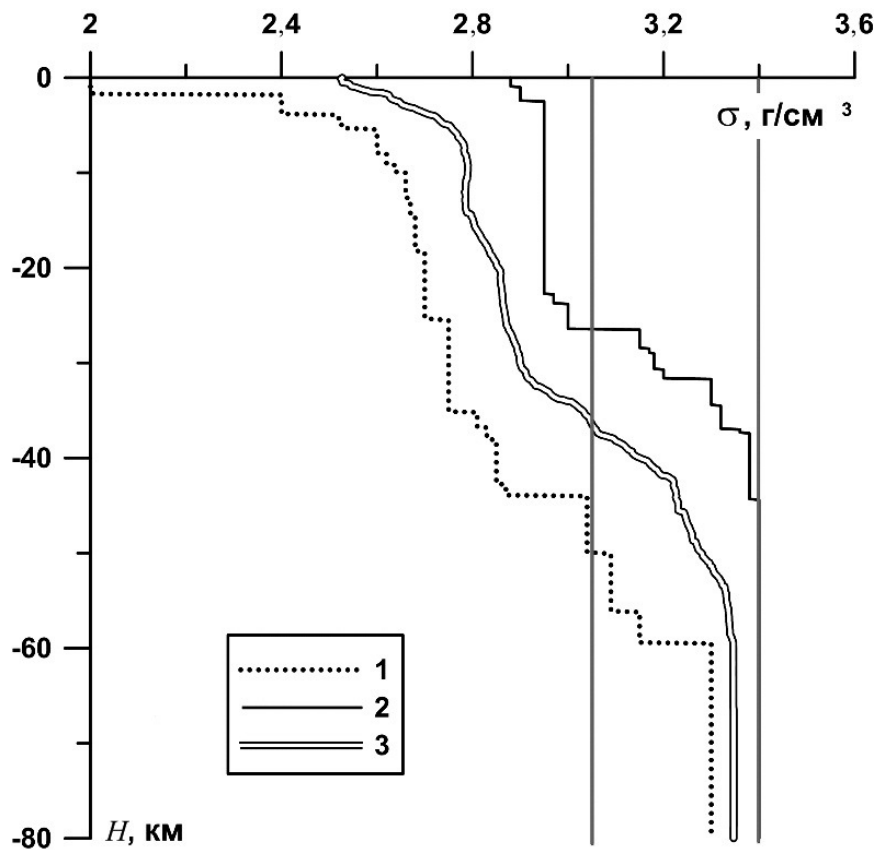


Рис. 2.12. Графики зависимости от глубины плотности в слое для 3D модели начального приближения:  
 1 – минимальной, 2 – максимальной, 3 – средней.  
 Вертикальными линиями показаны значения средневзвешенной (до глубины 80 км) и максимальной плотности мантийных блоков

Средняя плотность, в основном, повторяет закономерности в распределении максимальных и минимальных значений: резкое нарастание плотности в приповерхностной части разреза до глубины 5–8 км (влияние четвертичных отложений) и в зоне перехода корамантия на глубинах 40–50 км; слабоградиентная изменчивость в консолидированной части средней и нижней коры; ступень – при переходе к плотным мантийным блокам. Сравнительно с редукцией на любую постоянную плотность «нормальной» модели, надгидростатические добавки избыточной плотности имеют существенно меньшую амплитуду и минимизируют компенсационные составляющие расчетного уровня фона разноглубинных аномалий.

На рис. 2.13 иллюстрируется результат решения прямой трехмерной задачи гравиметрии для модели плоского слоя до глубины 80 км. Программа вычислений «3D\_σ CALC» составлена на основе «быстрых» алгоритмов и обладает высокой производительностью [Мартышко и др., 2015]. Так для модели сеточного куба размером 1336×969×80 узлов время расчета поля на сетке 1336×969 не превышает 4 часов на стандартном процессоре с тактовой частотой до 3 ГГц (при параллельной программной реализации с вычислением на 1 GPU NVidia Titan Black – 18 минут). Выявленное морфологическое отличие модельного поля от поля наблюдаемых гравитационных аномалий подчеркивает несогласие исходных 2D- и построенных 3D-моделей интерполированной плотности. Обозначенная проблема не является фатальной. Сгущение сейсмической сети профильных наблюдений, равно как и привлечение дополнительных данных других геофизических методов даже в локально одномерном варианте, сможет существенно повысить качество гравитационной плотностной модели начального приближения. Разностное поле (невывбранные остатки



гравитационных аномалий) служат исходной информацией при решении линейной и нелинейной обратных задач гравиметрии для построения трехмерных плотностных моделей.

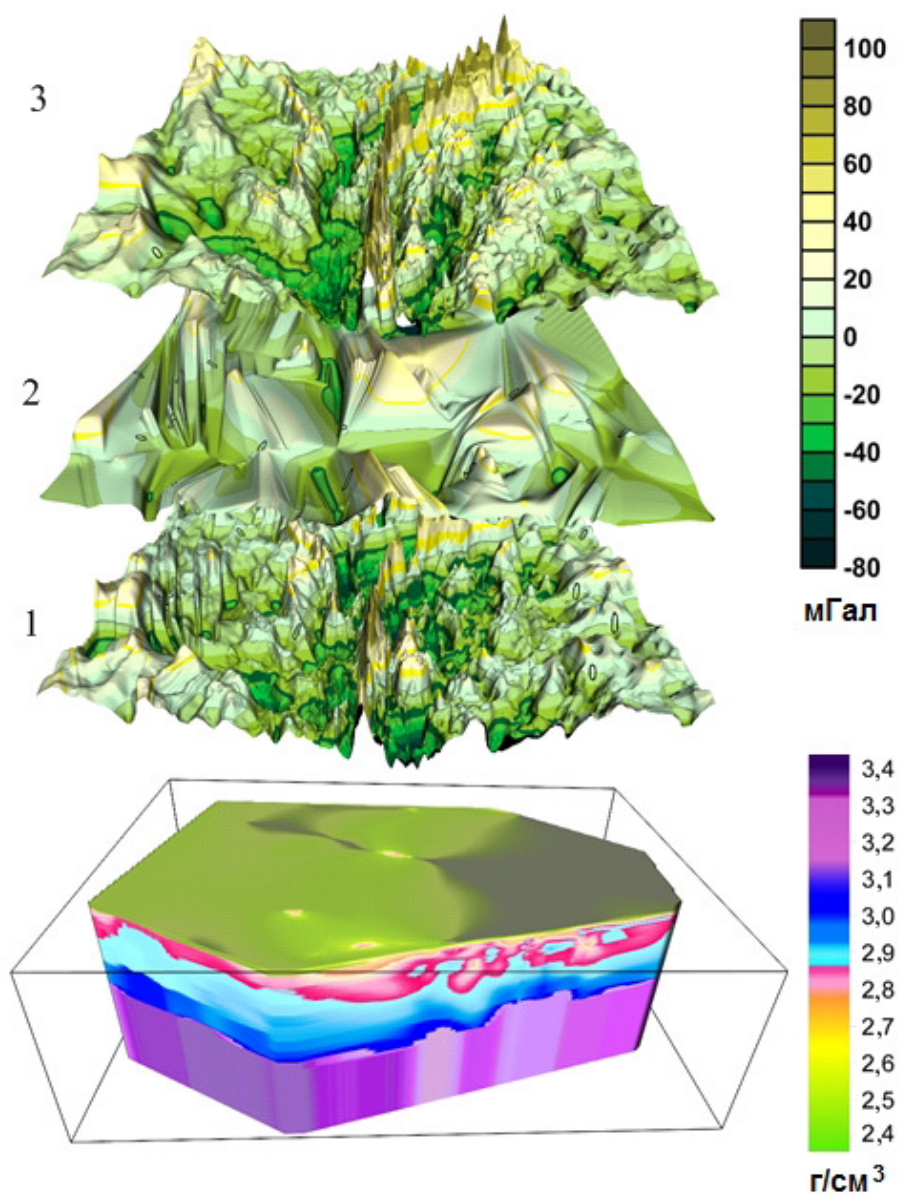


Рис. 2.13. Прямая задача гравиметрии для сеточных матриц 3D плотностной модели начального приближения:  
1 – наблюдаемое поле, 2 – модельное поле,  
3 – разность наблюдаемого и модельного полей (остаточное поле)

**МЕТОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ  
АНОМАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ**

---

---

**3.1. Анализ исходных данных**

При исследовании особенностей тектонического строения литосферы и построения геомагнитных моделей земной коры одной из важнейших задач является изучение и анализ структуры аномального магнитного поля, разделение поля на составляющие от различных слоев земной коры.

Для больших территорий особенность магнитной картографии связана с тем обстоятельством, что за период выполнения съемок, охватывающий несколько десятилетий, магнитное поле Земли значительно изменяется. При современных съемках проводят измерение модуля вектора индукции  $T$ . Для выделения аномального магнитного поля  $\Delta T_a$ , вызванного источниками в литосфере, необходимо исключить магнитное поле планетарного характера  $T_H$  – главное (или нормальное) поле Земли – и влияние магнитосферных источников. Модели нормальных полей, построенные по данным приземных съемок, из-за разновременности наблюдений, а также наличия широкого спектра высокоинтенсивных аномалий, вызванных намагниченными источниками в верхней части земной коры и из-за недоучета вековой вариации, содержат значительные погрешности  $\pm 100$  нТл. Проведение магнитных съемок на искусственных спутниках Земли дало возможность получить картину распределения магнитного поля и его вековой вариации на всей поверхности земного шара, не оставив «белых пятен». В настоящее время существенно расширились знания о пространственно-временных особенностях геомагнитного поля и достаточно хорошо разработаны методические вопросы сферического гармонического анализа. Это позволило создать по единой методике международные модели главного магнитного поля Земли IGRF, которые обновляются через каждые 5 лет [International ... , 1996].

Для территории России в рамках федеральной программы «Создание прогнозно-геофизических карт для основных минерагенических зон России» в последнее десятилетие проводятся работы по созданию электронных карт. Информационной базой для создания сводных карт аномального магнитного поля Урала явились данные площадных аэрогеофизических и наземных магнитных съемок крупного, среднего и мелкого масштабов, проведенные с 1955 по 2004 годы. Обработка геофизической информации выполнена с использованием современных компьютерных технологий. С целью приведения к единому уровню и увязки данных съемок были выполнены наблюдения по опорным аэромагнитным профилям и создана Уральская картографическая сеть. Поправки за вековые изменения магнитного поля Земли вычислены по международным аналитическим моделям IGRF. Цифровые данные аномального магнитного поля для всей территории заданы через 250 метров. В итоге проведенной работы составлена электронная модель карты аномального магнитного поля  $\Delta T_a$  Урала и прилегающих территорий Восточно-Европейской платформы и Западной Сибири на шести листах в масштабе 1:1 000 000 (P-40, 41; O-40, 41; N-40, 41), в которой исправлены обнаруженные ранее перекосы нормального уровня [Чурсин и др., 2008].

Для северной части территории Приполярного Урала были использованы данные оцифрованных карт (P-42, O-42, Q-42,) [Овчаренко, 1996]. Проведенное исследование показало, что данные этих карт содержат значительные перекосы нормального уровня, достигающие на восточном фланге 150–200 нТл. При построении полей относимости при аэромагнитных съемках используется свойство замкнутости силовых линий магнитной

индукции от источников в литосфере, поэтому для площади  $S$  должно выполняться условие:

$$\oint \Delta T_a \partial s = 0.$$

Несмотря на то, что территория исследования достаточно большая (примерно  $900 \times 1330$  км), это условие не выполнялось, и среднее значение аномалий составило 88 нТл. Поэтому было вычислено новое поле относимости и внесены поправки в массив данных. Процедура построения поля относимости в виде полинома от географических координат 4-го порядка подробно описана в работе [Федорова и др., 1989]. В полученном цифровом массиве данных среднее значение аномального магнитного поля не превышает 1 нТл.

### 3.2. Изучения структурных особенностей магнитных аномалий

Методика разделения аномалий потенциальных полей, математический аппарат изложены в главе 1: используются методы пересчета в верхнее и нижнее полупространство. Приведение полученных результатов на начальный уровень дает возможность разделять длинноволновые и коротковолновые составляющие амплитудного спектра аномалий, созданных литосферой.

Такая методика разделения гравитационного поля была использована при построении плотностной модели земной коры Уральского региона [Мартышко и др., 2010; 2011]. При изучении крупных территорий приходится задавать большие массивы данных, что приводит к значительным затратам времени при вычислениях на однопроцессорных компьютерах. Использование параллельных алгоритмов для многопроцессорных вычислительных систем значительно сокращает время расчетов.

Эти методы успешно применяются при решении обратных задач гравиметрии и магнитометрии, для восстановления поверхности раздела между слоями и плотности в слое [Мартышко и др., 2010; Акимова, Гемайдинов, 2007].

Параллельные алгоритмы повысотных трансформаций на основе итерационных методов градиентного типа разработаны и численно реализованы на суперкомпьютере «Уран», установленном в Институте математике и механике УрО РАН.

Распараллеливание итерационных методов градиентного типа (1.9–1.12, глава 1) (этап пересчета поля вниз) основано на разбиении матрицы  $K$  горизонтальными или вертикальными полосами на  $m$  блоков, а вектора решения  $u$  и вектора правой части  $\bar{U}$  СЛАУ на  $m$  частей так, что  $n = m \times L$ , где  $n$  – размерность системы уравнений;  $m$  – число процессоров;  $L$  – число строк или столбцов матрицы в блоке.

На текущей итерации каждый из  $m$  процессоров вычисляет свою часть вектора решения. В случае умножения матрицы  $K$  на вектор  $u$  каждый из  $m$  процессоров умножает свою часть строк матрицы  $K$  на вектор  $u$ . Host-процессор (ведущий) отвечает за пересылки данных и также вычисляет свою часть вектора решения.

На этапе пересчета поля вверх при вычислении интегрального оператора (1.6, глава 1) используется параллельный алгоритм умножения матрицы на вектор.

Программы, реализующие параллельные алгоритмы повысотных трансформаций магнитных аномалий на суперкомпьютере «Уран», написаны с помощью библиотеки MVARCH2 (MPI) на языке программирования Фортран [Мартышко и др., 2012].

Заметим, что для решения задачи с двойной точностью итерационными методами на суперкомпьютере «Уран» для хранения матрицы  $K$  требуется достаточно много памяти. Для сетки размера  $300 \times 300$  количество элементов матрицы  $K$  занимает примерно 60,3 Гбайт, а каждому отдельному процессу MPI-программы системой запуска задач на кластере «Уран» выделяется стандартно не более 2 Гбайт. Поэтому предварительно матрица  $K$  разбивается вертикальными полосами на блоки и хранится в памяти каждого про-

цессора по частям. Таким образом, с учетом требуемой памяти для решения нашей задачи необходимо не менее 50 процессоров «Уран».

Для пересчета поля вниз после дискретизации уравнения (1.7, глава 1) на сетке и аппроксимации интегрального оператора по квадратурной формуле задача свелась к решению СЛАУ большой размерности. После проведения вычислительных экспериментов для решения СЛАУ (1.8, глава 1) был выбран метод простой итерации (1.9, глава 1) как менее трудоемкий и не уступающий по точности другим методам [Мартышко и др., 2014б].

Для выбора параметра регуляризации  $\alpha$  мы воспользовались результатами интерпретации магнитных аномалий вдоль профилей ГСЗ, выполненные двумерным методом [Цирульский и др., 1980]. Исследования глубинного строения Уральского региона и построение магнитных моделей земной коры было проведено вдоль геотраверсов и профилей ГСЗ [Федорова, 2001; Федорова и др., 2010; Федорова, Колмогорова, 2013; Мартышко и др., 2011; Колмогорова, Федорова, 2015], часть из которых расположена в пределах рассматриваемой территории. В результате аппроксимации магнитных аномалий было получено распределение намагниченных источников в слоях земной коры. Это позволило сопоставить аномалии от модельных источников с вычисленными трансформациями магнитного поля для набора значений параметра регуляризации и выбрать для дальнейших расчетов величину  $\alpha$  по наилучшему совпадению графиков полей.

Результаты построения геофизических моделей по фрагменту геотраверса Рубин-1 показаны на рис. 3.1. Модель распределения намагниченности в земной коре построена в результате интерпретации магнитного поля (рис. 3.1, б), и модель распределения скорости продольных волн в литосфере построена по данным глубинного сейсмического зондирования (рис. 3.1, в) [Федорова, Колмогорова, 2013].

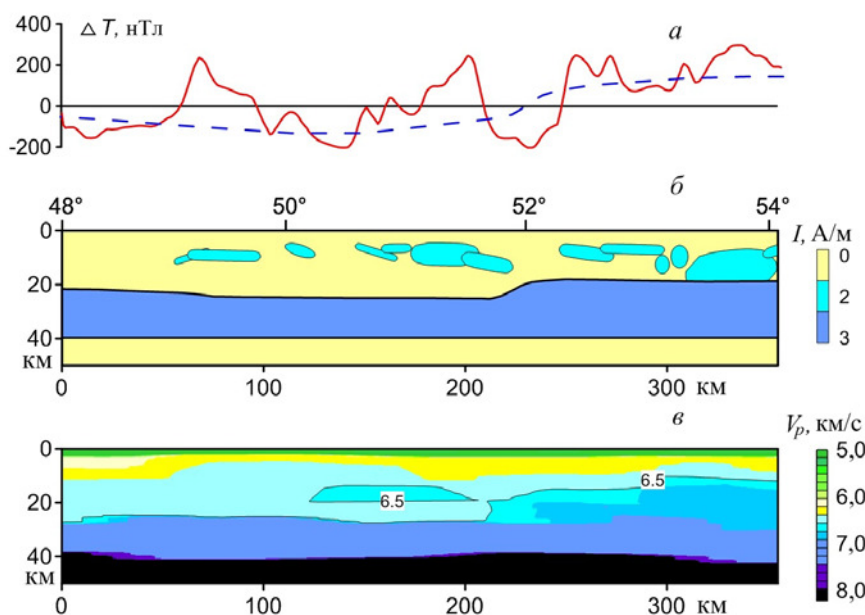


Рис. 3.1. Фрагмент профиля Рубин-1:

- a* – графики магнитного поля (сплошная линия) и модельного поля от нижнего слоя (пунктирная линия);
- б* – магнитная модель распределения намагниченности;
- в* – сейсмическая модель скоростей продольных волн

Источники локальных магнитных аномалий расположены в верхнем слое коры до глубины 20 км. Поскольку на разрезе (рис. 3.1, б) модельные источники расположены глубже 5 км, то для тестовых расчетов было выбрано это значение высоты – 5 км. В соответствии с предложенной процедурой трансформации поля для разделения источников локальных аномалий по глубине их залегания магнитное поле было рассчитано вверх на высоту 5 км, затем аналитически продолжено вниз на глубину 5 км и вновь пересчитано вверх на дневную поверхность. Графики полученных значений трансформированного по-

ля для значений параметра  $\alpha = 0,01$  и  $\alpha = 0,1$  приведены на рис. 3.2, а. Графики для  $\alpha = 0,01$  показаны сплошной линией, а для  $\alpha = 0,1$  – пунктирной линией. Результаты показывают, что графики аномального и вычисленного поля хорошо совпадают при  $\alpha = 0,01$ , и значительные расхождения наблюдаются при  $\alpha = 0,1$ .

Аналогичные вычисления были проведены для  $H = 10, 20, 30, 40$  и  $50$  км. Для больших значений  $H = 40$  и  $50$  км, графики отличаются незначительно при  $\alpha = 0,01$  и  $\alpha = 0,1$ . Для  $H = 40$  км результаты вычислений показаны рис. 3.2, а. Поэтому для дальнейших расчетов мы выбрали параметр регуляризации  $\alpha = 0,01$  [Федорова и др., 2015].

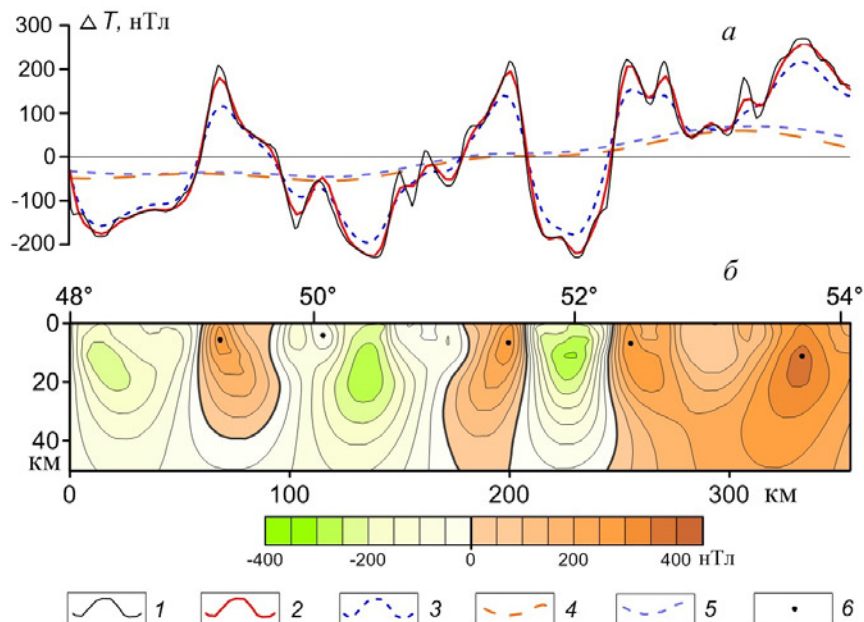


Рис. 3.2. Результат трансформации аномального магнитного поля по профилю Рубин-1: а – графики магнитных аномалий; б – продолженное вниз внешнее магнитное поле до глубины 50 км, изолинии проведены через 50 нТл.

1 – наблюдаемое поле;

2–5 вычисленные магнитные аномалии на поверхности земли для параметров трансформации:

2 –  $H = 5$  км и  $\alpha = 0,01$ ; 3 –  $H = 5$  км и  $\alpha = 0,1$ ; 4 –  $H = 40$  км и  $\alpha = 0,01$ ; 5 –  $H = 40$  км и  $\alpha = 0,1$ ;

6 – локальные максимумы продолженного вниз поля

На рис. 3.2, б показаны результаты аналитически продолженного вниз магнитного поля до глубины 50 км. Изолинии магнитных аномалий проведены через 50 нТл, и локальные максимумы отмечены точками. Положения некоторых максимумов совпадают с верхними кромками модельных источников. Особенно отметим, что контуры изолиний продолженного в нижнее полупространство поля не совпадают с источниками, полученными в результате интерпретации (рис. 3.1, б). На рис. 3.3 приведены совмещенные разрезы.

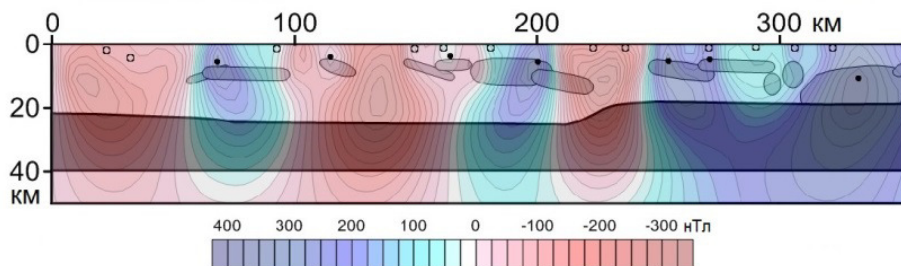


Рис. 3.3. Фрагмент профиля Рубин-1.

Сравнение магнитной модели и аналитически продолженного аномального магнитного поля



В ряде методов интерпретации гравитационных и магнитных аномалий аналитически продолженное внешнее поле используют для оконтуривания источников аномалий, а изолинии для различных значений интенсивности поля представляют как эквивалентные источники для различных значений плотности или намагниченности. Этот пример наглядно демонстрирует неправомерность такого подхода.

**Результаты изучения структурных особенностей аномального магнитного поля.** Разработанные параллельные алгоритмы были использованы для изучения структурных особенностей магнитных аномалий обширной территории в пределах трапеции 48–72° в. д. и 60–68° с. ш. Амплитуды магнитных аномалий  $\Delta T_a$  не превосходят 3000 нТл, поэтому можно применять методы, разработанные для гармонических функций [Магниторазведка, 1990].

На суперкомпьютере «Уран» вычисления выполнены для набора высот  $H = 5, 10, 20, 40, 50, 100$  км. Для каждой трансформации проводился пересчет поля вверх на высоту  $H$  по формуле (1.6, глава 1), затем пересчет поля вниз на глубину  $2H$  по формуле (1.7, глава 1) и опять пересчет вверх на высоту  $H$  по формуле (1.6, глава 1).

Результаты изучения структурных особенностей аномального магнитного поля приведены в главе 4.

Карта аномального магнитного поля и его трансформант приведены на рис. 4.17. Как видно из рисунков, на картах локальных аномалий (см. рис. 4.17 в, з) более отчетливо, чем на карте аномального магнитного поля, прослеживаются пояса ультрабазитовых и базитовых интрузий, а также другие проявления магматической и тектонической активности в регионе.

На этих картах отчетливо отражено, что породы верхней коры Тимано-Печерской плиты имеют низкие магнитные свойства особенно в верхнем слое до глубины 5 км, также как и породы западной части Уральской складчатой системы. На карте для слоя, расположенного на глубине от 5 до 20 км на территории Восточно-Европейской платформы, цепочки магнитных аномалий протягиваются вдоль границы с Тиманским поднятием. Некоторые аномалии пересекают тектоническую границу, и часть из них находится в пределах соседней Тимано-Печерской плиты. Это указывает на то, что на глубине более 5 км граница Восточно-Европейской платформы смешается на северо-восток относительно границы, которая показана на тектонической карте для поверхностных структур. На восточном крае Тимано-Печерской плиты локальные аномалии протягиваются далеко к востоку от границы с Уральским орогеном, и ряд из них достигает середины складчатого Урала. Безусловно, это свидетельствует о надвиге с востока Уралид на структуры Тимано-Печерской плиты. К таким же выводам можно прийти на основании распределения региональных магнитных аномалий. В дальнейшем эти карты позволят уточнить тектонические схемы литосферы региона на разных глубинах.

Уральские горы протянулись более чем на 2300 км и условно разделены на Южный, Средний, Северный, Полярный и Приполярный сектора. Ранее отрицательные региональные аномалии были выделены над Южным, Средним и Северным Уральскими горами [Федорова и др., 1989; Мартышко и др., 2012]. Как видно на карте (рис. 4.17, з), наличие отрицательных региональных аномалий магнитного поля характерно и для Приполярного и Полярного секторов Урала [Fedorova et al., 2015; Martyshko et al., 2015], что, безусловно, свидетельствует о сходстве особенностей глубинного строения всех секторов Уральского орогена.

Положительные региональные аномалии наблюдаются над восточной частью Тимано-Печерской плиты, причем наиболее интенсивная Ильчевская аномалия простирается с севера на юг в пределах Предуральского краевого прогиба. Цепочки положительных аномалий наблюдаются вдоль края Восточно-Европейской платформы и на территории Западной Сибири.

Сопоставление данных геологического картирования и выделенных локальных аномалий иллюстрируется для участка Полярного Урала в районе крупного Войкарсыннинского массива (рис. 4.19). Использована геологическая карта масштаба 1:1000000 третьего поколения [Государственная ... , 2007б].

Интенсивные локальные магнитные аномалии наблюдаются над краевыми частями гипербазитовых массивов и практически совпадают с результатами геологического картирования серпентинитов (см. рис. 4.19, а). Менее интенсивные аномалии наблюдаются в ряде мест над габброидами и гранодиоритами. Над осадочными комплексами Западной Сибири наблюдаются несколько интенсивных локальных аномалий (до 200 нТл), что свидетельствует о наличии базит-ультрабазитовых комплексов в верхней части кристаллического фундамента.

Над гипербазитами наблюдаются как положительные, так и отрицательные гравитационные локальные аномалии (см. рис. 4.19, б). Как правило, над краями массивов расположены слабые отрицательные аномалии (3–6 мГал), а над центральными частями – более интенсивные положительные аномалии (6–15 мГал). Это отражает изменение физических свойств пород при различных процессах метаморфизма ультраосновных пород [Петрофизика, 1992; Методические ... , 1983]. Подавляющее большинство глубинных ультраосновных пород не содержат первичных ферромагнитных минералов. Плотность неизмененных ультрабазитовых пород значительно превосходит среднюю плотность пород верхнего слоя кристаллической коры и составляет 2,8–3,4 г/см<sup>3</sup>. При серпентинизации ультрабазитов происходит уменьшение плотности пород до значений 2,4–2,7 г/см<sup>3</sup> и образуются магнитные минералы, в основном, магнетит. Серпентинизация с образованием магнетита более активно происходит в краевых частях массивов и по разломам.

Базальтовые породы и габбро могут иметь значительную намагниченность при высоких значениях плотности. Такие массивы могут создавать положительные гравитационные и магнитные локальные аномалии.

Над осадочными породами на западе и на востоке от открытого Урала интенсивность локальных гравитационных аномалий не превосходит 3 мГал. Поэтому для картирования базит-ультрабазитовых массивов на закрытых площадях лучше использовать карты локальных магнитных аномалий.

Отметим, что на рис. 4.19, б над гранитными массивами выделены протяженные гравитационные отрицательные аномалии небольшой интенсивности (3–5 мГал), причем контуры нулевой изолинии достаточно хорошо совпадают с границами массивов. На Южном, Среднем и Северном Урале граниты обладают слабыми магнитными свойствами, над ними наблюдается спокойное магнитное поле. Небольшие магнитные аномалии наблюдаются над массивами, состоящими из диоритов и гранодиоритов. Наличие магнитных аномалий над гранитными массивами на приведенной карте (рис 4.19, а), скорее всего, свидетельствует о том, что гранитные блоки имеют небольшую мощность, и под ними расположены основные или ультраосновные интрузивы.

Для Полярного, Приполярного Урала и прилегающих территорий Тимано-Печерской провинции и Западной Сибири построена совмещенная карта локальных гравитационных и положительных магнитных аномалий. На основании этих данных построена прогнозная карта базит-ультра-базитовых массивов в верхней части фундамента (рис. 3.4).

Проведено сравнение карты с результатами интерпретации магнитного поля вдоль профилей ГСЗ: Агат-2, Кварц, Рубин-1, Глобус и др. [Федорова, Колмогорова, 2013; Колмогорова, Федорова, 2015], которое показало, что на разрезах намагниченные источники, выделенные в верхней коре до глубины 5 км, хорошо соответствуют расположению массивов на построенной карте.

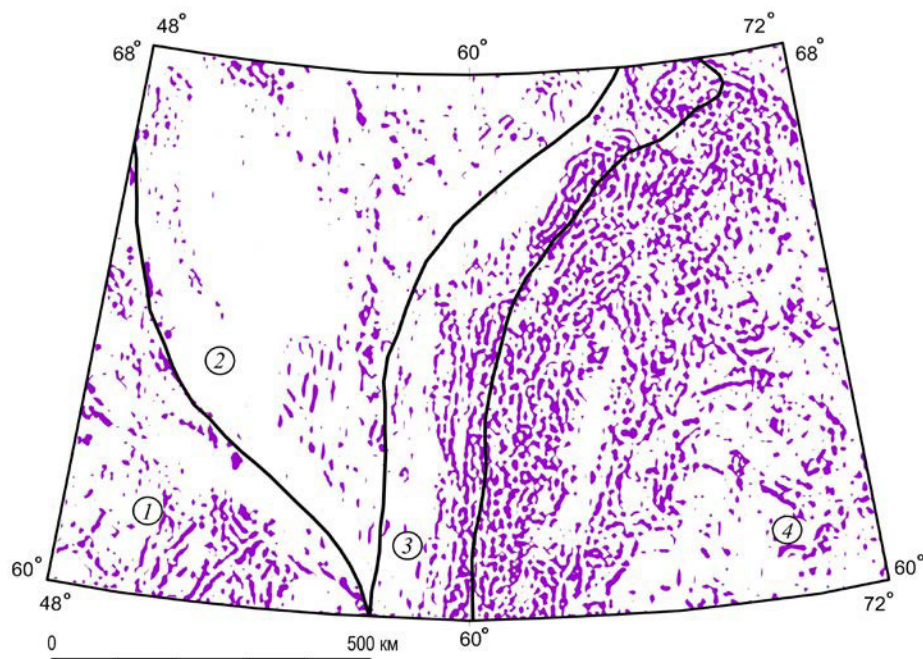


Рис. 3.4. Прогнозная карта базит-ультрабазитовых массивов, расположенных под осадочными породами в верхней части фундамента до глубины 5 км на территории приполярного сектора Евразии. Тектонические структуры: 1 – Восточно-Европейская платформа; 2 – Тимано-Печорская плита; 3 – Уральская складчатая система; 4 – Западно-Сибирская плита

В пределах Тимано-Печорской плиты выделено незначительное количество локальных магнитных аномалий, и, следовательно, верхний слой содержит лишь небольшое количество базит-ультрабазитовых комплексов. В пределах Тиманского кряжа данные построенной карты совпадают с выходами на поверхность габброидов.

Территория Западной-Сибири покрыта плотной сетью локальных аномалий. Поэтому построенная карта была сопоставлена с картами-схемами геологического строения фундамента Западно-Сибирской плиты (листы Q-41, Q-42, P-41 и P-42) [Государственная ... , 2007а; 2007б; 2011; 2014]. Положение на этих картах гипербазитовых комплексов (серпентинизированные дуниты, гарцбургиты, лерцолиты, пироксениты, серпентиниты), габброидных комплексов (габбро, габбронориты, габбродиориты, пироксениты), а также диорит-гранодиорит-гранитовых комплексов в основном определено по геофизическим полям и лишь в некоторых местах подтверждено результатами бурения. При составлении сводных карт-схем использованы материалы разных авторов, полученные в период с 1959 по 2004 гг. По-видимому, были использованы разные методики построения карт. Тем не менее, в большинстве случаев положение базит-ультрабазитовых комплексов на этих картах-схемах и нашей карте совпадает [Федорова, 2016; Fedorova, Rublev, 2016]. В отличие от карт-схем, на новой прогнозной карте, построенной по единой методике, выделено значительно больше массивов.

### 3.3. Аппроксимация аномалий модуля магнитной индукции $\Delta T_a$ набором сингулярных источников

При выполнении магнитных съемок в основном используется аппаратура, измеряющая абсолютные значения модуля геомагнитной индукции  $T$ , поэтому аномальное магнитное поле литосферы представлено модульными значениями  $\Delta T_a$ . Поскольку  $\Delta T_a$  не гармоническая функция, для корректного применения метода решения трехмерных обратных задач магнитометрии требуется провести преобразование и определить гармоническую составляющую магнитного поля  $Z$ . Решение многих задач значительно упрощается,



если источники имеют вертикальную намагниченность. Аппроксимационные методы позволяют выполнять процедуру приведения к полюсу и вычислять составляющую  $Z_v$  для вертикально намагниченных источников.

Разработан алгоритм вычисления вертикальной составляющей аномального магнитного поля по распределению его абсолютного значения. Преобразование основано на аппроксимации аномалий модуля магнитной индукции  $\Delta T_a$  набором сингулярных источников и последующем вычислении вертикальной компоненты магнитного поля  $Z$  от подбранного распределения источников. В качестве модельных источников использован набор стержней, однородно намагниченных вдоль своей оси. Проведено исследование применимости различных методов нелинейной оптимизации для решения данной задачи. Алгоритм реализован с помощью технологии параллельных вычислений на графическом процессоре NVidia [Бызов, Муравьев, 2015].

**3.3.1. Математический аппарат.** В трехмерном случае для аппроксимации магнитных аномалий набором сингулярных источников необходимо выбрать оптимальный класс модельных объектов. В работе [Майер и др., 1985] предложено использовать в качестве модельных тел сингулярные отрезки (или стержни) с произвольным направлением вектора намагниченности. Каждый отрезок описывается девятью параметрами: координаты концов и составляющие вектора намагниченности. В работе [Бызов, Муравьев, 2015] предложено использовать отрезки, однородно намагниченные вдоль своего направления. В этом случае количество подбираемых параметров каждого модельного отрезка снижается до семи, что увеличивает устойчивость решения задачи.

Напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  в точке  $\mathbf{p} = (\xi, \eta, \zeta)$  декартовой прямоугольной системы координат трехмерного пространства от отрезка с координатами концов  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  и постоянной линейной намагниченностью  $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$  в системе единиц СИ определяется формулой:

$$\mathbf{H}(\mathbf{p}) = -\frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} U_{xx} & U_{xy} & U_{xz} \\ U_{yx} & U_{yy} & U_{yz} \\ U_{zx} & U_{zy} & U_{zz} \end{pmatrix} \mathbf{J},$$

$$U_{i,j} = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{d}_1||\mathbf{d}_2|q} \left( \left( \frac{1}{|\mathbf{d}_1|} + \frac{1}{|\mathbf{d}_2|} \right) \left( \frac{1}{q} (D_{1i} + D_{2i})(D_{1j} + D_{2j}) - \delta_{i,j} \right) + \frac{1}{|\mathbf{d}_1|} D_{1i} D_{1j} + \frac{1}{|\mathbf{d}_2|} D_{2i} D_{2j} \right),$$

где  $\mathbf{d}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{p}$ ;  $\mathbf{d}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{p}$ ;  $\mathbf{a} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ;  $\mathbf{D}_1 = \frac{\mathbf{d}_1}{|\mathbf{d}_1|}$ ;  $\mathbf{D}_2 = \frac{\mathbf{d}_2}{|\mathbf{d}_2|}$ ;  $q = 1 + (\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$ ;  $\delta_{i,j}$  – символ Кронекера;  $i$  и  $j$  заменяют обозначения  $x, y, z$ .

Если принять вектор намагниченности направленным вдоль отрезка, т. е.  $\mathbf{J} = |\mathbf{J}| \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ , то формула для вычисления существенно упрощается:

$$\mathbf{H}(\mathbf{p}) = \frac{|\mathbf{J}|}{4\pi} \left( \frac{\mathbf{D}_2}{d_2^2} - \frac{\mathbf{D}_1}{d_1^2} \right).$$

Таким образом, прямая задача магнитометрии для отрезка решается относительно просто в элементарных функциях, что напрямую влияет на скорость вычислений.

Пусть на некотором множестве  $\{\mathbf{p}_j\}_{j=0}^{M-1}$   $M$  точек заданы измеренные значения аномалий модуля магнитной индукции  $\Delta T$  и вектор нормального геомагнитного поля  $\mathbf{B}_n : \{\Delta T(\mathbf{p}_j), \mathbf{B}_n(\mathbf{p}_j)\}_{j=0}^{M-1}$ . Множество из  $N$  отрезков, поле которых на фоне нормального геомагнитного поля аппроксимирует заданные аномалии модуля, можно получить путем минимизации функционала по параметрам этих отрезков:

$$F(\{\mathbf{r}_{1i}, \mathbf{r}_{2i}, \mathbf{J}_i\}_{i=0}^{N-1}) = \sum_{j=0}^{M-1} \left( \left| \mathbf{B}_n(\mathbf{p}_j) + \mu_0 \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{H}_i(\mathbf{p}_j) \right| - |\mathbf{B}_n(\mathbf{p}_j)| - \Delta T(\mathbf{p}_j) \right)^2,$$

где  $\mathbf{H}_i(\mathbf{p}_j)$  – поле  $i$ -ого отрезка в точке  $\mathbf{p}_j$ ;  $\mu_0$  – магнитная постоянная.

**3.3.2. Методы оптимизации.** При аппроксимации магнитных аномалий и минимизации функционала  $F$  были применены методы, использующие сопряженные направления [Химмельблау, 1975]. В общем виде их можно описать следующим образом. Пусть требуется найти минимум функции  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in R^n$  и на  $k$ -ой итерации метода значение аргумента получилось равным  $\mathbf{x}^{(k)}$ , а направление поиска –  $\mathbf{p}^{(k)}$ . Новое значение  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  выбирается поиском минимума  $f$  вдоль направления  $\mathbf{p}^{(k)}$ :  $\alpha^{(k)} = \arg \min_{\alpha} f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{p}^{(k)})$ ,  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{p}^{(k)}$ . Одномерный поиск можно выполнять произвольным способом, мы же использовали метод золотого сечения. Следующее направление поиска получают так:  $\mathbf{p}^{(k+1)} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(k+1)}) + \beta^{(k)} \mathbf{p}^{(k)}$ , где  $\beta^{(k)}$  – некоторый коэффициент, выбором которого специфицируют методы сопряженных градиентов:

$$\beta^{(k)} = \frac{(\nabla f(\mathbf{x}^{(k+1)}), \nabla f(\mathbf{x}^{(k+1)}))}{(\nabla f(\mathbf{x}^{(k)}), \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}))} - \text{метод Флетчера–Ривса (для квадратичных функций}$$

сходится не более чем за  $n$  итераций);

$$\beta^{(k)} = \max \left\{ \frac{(\nabla f(\mathbf{x}^{(k+1)}), \nabla f(\mathbf{x}^{(k+1)}) - \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}))}{(\nabla f(\mathbf{x}^{(k)}), \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}))}, 0 \right\} - \text{метод Поляка–Рибьера;}$$

$$\beta^{(k)} = -\frac{(\nabla f(\mathbf{x}^{(k+1)}), \nabla f(\mathbf{x}^{(k+1)}) - \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}))}{(\mathbf{p}^{(k)}, \nabla f(\mathbf{x}^{(k+1)}) - \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}))} - \text{метод Хестенса–Штифеля;}$$

$$\beta^{(k)} = -\frac{(\nabla f(\mathbf{x}^{(k+1)}), \nabla f(\mathbf{x}^{(k+1)}))}{(\mathbf{p}^{(k)}, \nabla f(\mathbf{x}^{(k+1)}) - \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}))} - \text{метод Дай–Юаня.}$$

Для различных функций  $f$  тот или иной выбор  $\beta$  будет наилучшим вариантом. В нашем случае, как показала практика, метод Поляка–Рибьера сходил быстрее трех других. При любом выборе  $\beta$  начальное значение  $\mathbf{p}^{(0)}$  принимается равным  $-\nabla f(\mathbf{x}^{(0)})$ ; кроме того, после каждых  $n$  итераций, либо в случае возрастания  $f$  вдоль направления  $\mathbf{p}^{(k)}$ , нужно произвести «обновление» метода: положить  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)}$ ,  $\mathbf{p}^{(k+1)} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(k+1)})$ . Условиями остановки итерационного процесса служили: достижение требуемой точности подбора  $f(\mathbf{x}^{(k)}) < \varepsilon_1$ , т. к. в нашем случае  $F(\{\mathbf{r}_{1i}, \mathbf{r}_{2i}, \mathbf{J}_i\}_{i=0}^{N-1})$  должно стремиться к 0; длина шага метода два раза подряд

была меньше заданного значения  $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| < \varepsilon_2$ , в такой ситуации метод «топчется на месте»; норма градиента два раза подряд меньше априори заданной погрешности  $\|\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})\| < \varepsilon_3$ , т. к. в этом случае метод «находится» около критической точки и в последующих итерациях длина шага будет сопоставима с  $\varepsilon_3$ .

Для устойчивой сходимости метода и сохранения физического смысла (например, отрезки не могут располагаться выше поверхности точек измерения поля) решение искалось на выпуклом компактном множестве в рамках заданных постоянных ограничений на параметры  $\mathbf{x} \in \Omega \subset R^n$ . Применялся метод проекций [Химмельблау, 1975]: на каждой итерации перед выбором длины шага вместо направления  $\mathbf{p}^{(k)}$  берется его проекция на множество допустимых значений  $\mathbf{p}_\Omega^{(k)}$ , затем  $\alpha^{(k)}$  выбирается при дополнительном условии  $\mathbf{x}^{(k+1)} \in \Omega$ :

$$\alpha^{(k)} = \min \left\{ \arg \min_{\alpha} f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{p}_\Omega^{(k)}), \max \{ \alpha \mid \mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{p}_\Omega^{(k)} \in \Omega \} \right\}.$$

Приведенный выше метод был реализован в программе на языке Си, которая за счет проведения параллельных вычислений на современных графических процессорах (GPU) NVidia с применением библиотеки CUDA и ее расширения cuBLAS позволила достичь высокой производительности расчетов [Бызов, Муравьев, 2015].

**3.3.3. Определение компонент аномального магнитного поля приарктической части Уральского региона.** Разработанная программа применена для приарктической части Уральского региона. Исходное аномальное магнитное поле  $\Delta T_a$  задано на сетке размерностью  $969 \times 1335$  ячеек с шагом 1 км. Величины поля за пределами участка заменены на пустые значения, таким образом, сетка содержит 1048333 непустых значений. Компоненты нормального геомагнитного поля были вычисленные по модели IGRF [Thébault et al., 2015], а данные рельефа земной поверхности заданы из базы SRTM PLUS [Becker et al., 2009; Муравьев, 2015]. Все данные пересчитаны в 11 зону проекции Гаусса-Крюгера [Муравьев, Бызов, 2015] и подготовлены в виде сеток одинаковой размерности.

Для управления процессом вычисления на GPU создана программная оболочка «подбор стержнями», основная цель которой состояла в задании начального распределения модельных источников (стержней). Кроме того, для того чтобы обеспечить хорошую сходимость процесса минимизации предусматривалась возможность редактирования параметров пользователем.

Ввиду значительной размерности задачи, вначале было решено разбить исходные данные на набор фрагментов в виде квадратных сеток размерностью  $97 \times 103$  точек (130 фрагментов) и выполнять подбор для каждой из них. Для уменьшения краевых эффектов сетка каждого фрагмента дополнялась со всех сторон одним рядом ячеек, значения поля в которых устанавливались нулевыми. Для каждого квадрата генерировалась модель из 255 стержней, центры которых равномерно распределены на заданной пользователем глубине (например, 9 км). Исходная длина всех стержней была одинаковая и также задана пользователем (8 км). Ориентировка в пространстве выбирается случайным образом. Намагниченность источников направлена вдоль стержня, а начальное значение модуля линейной намагниченности также задано для всех одинаковым – 100 А·м. Таким образом, подбирается  $7 \cdot N$  параметров: 6 координат двух концов стержня и интенсивность линейной намагниченности,  $N$  – число стержней модели. Среднее квадратичное отклонение (СКО) поля, вычисленного в результате аппроксимации исходных значений  $\Delta T_a$ , варьировалось для различных фрагментов от 3 до 20 нТл.

Наборы модельных отрезков после подбора в пределах каждого фрагмента были объединены в общий файл, который был использован как начальное приближение для реше-

ния задачи на сетке полной размерности. После удаления отрезков, выходящих за пределы участка, полный подбор составил задачу размерности 28199 стержней на сетке из 1048333 точек задания магнитного поля. Вычисление данной задачи на видеопроцессоре заняло порядка 8 минут на каждую итерацию на одном GPU NVidia GTX Titan Black. Характеристики результатов расчета приведены в табл. 3.1. Параметры подобранной системы стержней – в табл. 3.2.

Таблица 3.1

**Характеристики интенсивности магнитных аномалий**

Поле (нТл)	Минимальное	Максимальное	Среднее	СКО	Стандартное отклонение
Исходное $\Delta T_a$	-881,10	2837,00	75,68	215,52	201,80
Подобранное $\Delta T_a$	-703,67	2559,18	75,95	215,71	201,90
Разность	-581,53	535,01	0,27	12,71	12,71
Восстановленное $B_x$	-1496,70	3000,74	7,68	195,82	195,67
Восстановленное $B_y$	-2118,47	2372,92	7,490	151,14	150,96
Восстановленное $B_z$	-729,66	2738,29	76,86	218,44	204,47

Таблица 3.2

**Характеристики параметров стержней**

Параметр	Максимум	Минимум	Среднее	СКО
Глубина (км)	15,10	1,34	9,01	1,25
Намагниченность линейная ( $10^6 \cdot \text{А} \cdot \text{м}$ )	98,36	101,29	99,90	1,470
Длина (км)	0,02	16,61	4,10	2,61

На рис. 3.5 приведены результаты аппроксимации  $\Delta T_a$  исследуемого участка [Бызов, Муравьев, 2015]. Показаны карта подобранного модуля аномального магнитного поля  $\Delta T_a$ , и вычисленная вертикальная компонента от подобранной системы стержней. Поскольку визуально карты почти неотличимы, на рис. 3.5, *з* приведена разность этих компонент магнитного поля. Разность достигает значений  $\pm 400$  нТл.

Таким образом, разработанная компьютерная технология может успешно использоваться для восстановления компонент аномального магнитного поля по известному распределению его абсолютного значения. Использование технологии параллельных вычислений на графическом процессоре NVidia показало высокую эффективность на сетках большой размерности.

**3.3.4. Приведение к полюсу региональных магнитных аномалий.** Для исследуемой территории, включающей Приполярный и Полярный Урал, выполнена аппроксимация региональной составляющей магнитного поля и определена вертикальная составляющая  $Z_v$ . Затем выполнена процедура приведения к полюсу и вычислены компоненты  $Z_v$  при вертикальной намагниченности всех источников (рис. 3.6). Несмотря на то, что исследования проводятся для приполярного региона, направление геомагнитного поля близко к вертикальному (наклонение  $74-80^\circ$ ), однако расхождения между аномалиями  $\Delta T_a$  и  $Z_v$  значительные. Эпицентры аномалий  $Z_v$  смещены к северо-северо-востоку относительно эпицентров аномалий  $\Delta T_a$ , причем расстояние достигает порой 20–40 км.



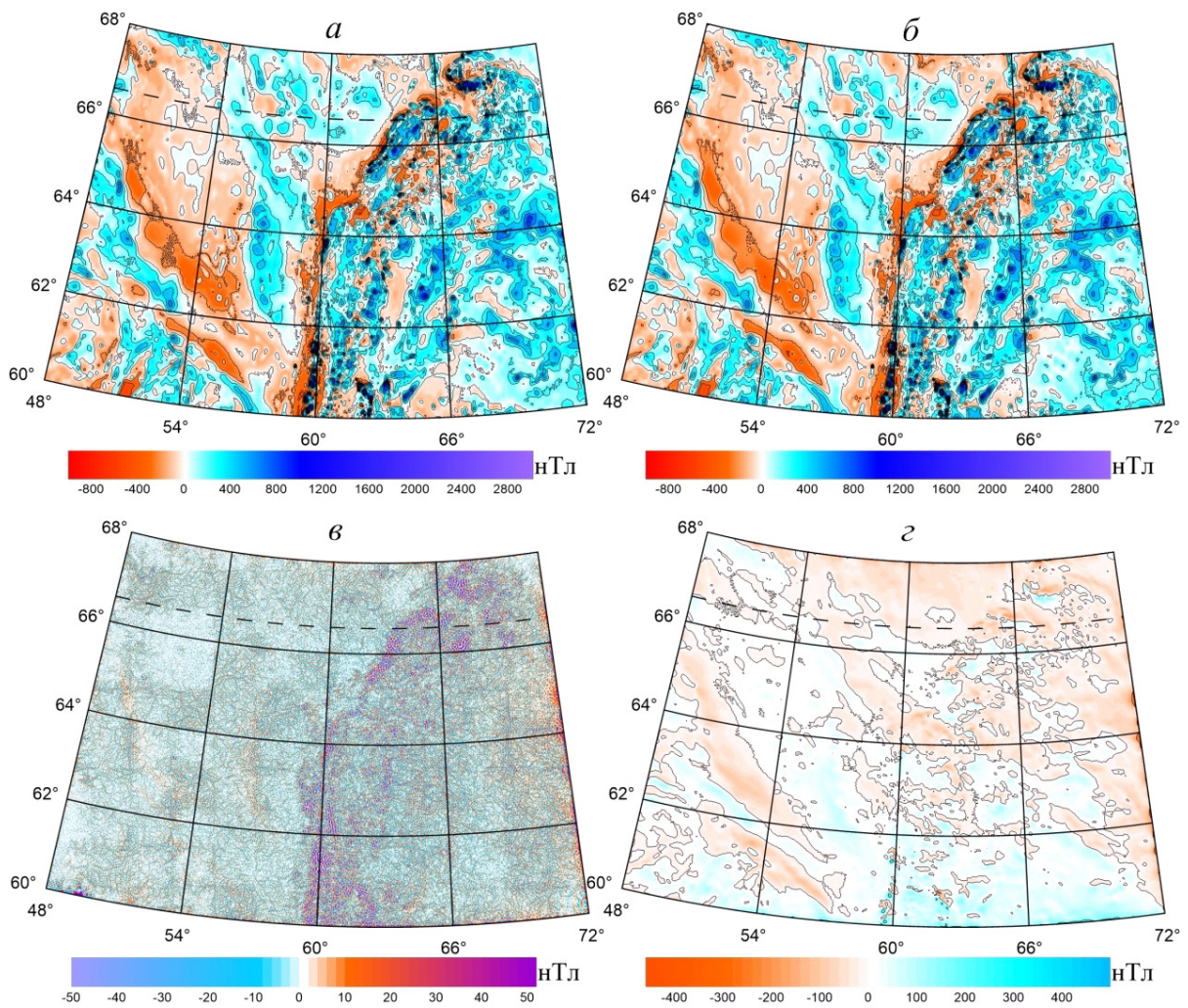


Рис. 3.5. Результаты аппроксимации:

*a* – выбранное аномальное магнитное поле  $\Delta T_a$ ; *б* – вычисленная от системы стержней вертикальная компонента магнитного поля  $Z$ ; *в* – разность исходного и выбранного магнитных полей  $\Delta T_a$ ; *г* – разность между вертикальной компонентой  $Z$  и абсолютными значениями аномального магнитного поля  $\Delta T_a$

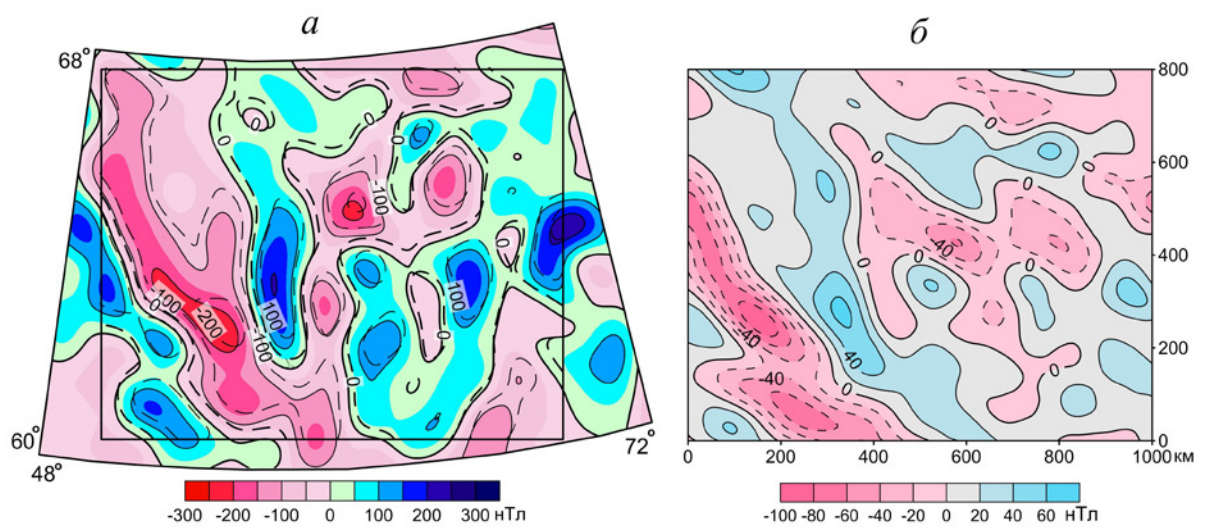


Рис. 3.6. Результат определения вертикальной компоненты  $Z_v$  региональных магнитных аномалий.

Изолинии приведены через 100 нТл:  $\Delta T_a$  – сплошными линиями;  $Z_v$  – пунктирными линиями (*a*). Разность  $\Delta T_a - Z_v$ , изолинии приведены через 20 нТл (*б*)

### 3.4. Моделирование поверхности раздела намагниченных слоев

Геофизические исследования, проведенные по профилям ГСЗ, позволили разделить консолидированную земную кору по магнитным свойствам на два слоя [Федорова и др., 2010; 2013; Федорова, Колмогорова, 2013; Martyshko et al., 2010]. Верхний слой кристаллической земной коры не вносит заметного вклада в региональное магнитное поле и характеризуется низкой средней намагниченностью, по литературным источникам ее величина менее 0,3 А/м [Крутиховская, Пашкевич, 1976]. В пределах этого слоя выделены локальные намагниченные источники. Нижний слой коры намагничен значительно сильнее. По результатам двумерного моделирования мы оценили, что значение намагниченности этого слоя достигает 3 А/м, а средняя глубина составляет 18–20 км. Верхняя граница слоя достаточно хорошо совпадает на соответствующих сейсмических разрезах с положением базальтового слоя, определенного по скоростям продольных волн 6,4–6,5 км/с. Полученные параметры можно использовать в качестве начального приближения для трехмерной интерпретации региональной составляющей аномального магнитного поля.

**3.4.1. Математический аппарат.** Решение этой задачи сводится к решению трехмерной структурной обратной задачи магнитометрии для слоистой среды. Предполагается, что нижнее полупространство состоит из нескольких слоев постоянной намагниченности  $I_l$ , разделенных поверхностями  $S_l, l = 1, \dots, L$ , где  $L$  – число границ раздела. Верхняя и нижняя поверхности – горизонтальные и описываются уравнениями  $z_1(x,y) = 0, z_L(x,y) = H_M$ . Требуется восстановить поверхности раздела слоев на основе данных о магнитной индукции  $B(z)$ , измеренной на некоторой площади.

Для двуслойной модели вертикальная составляющая напряженности магнитного поля в точке  $(x,y)$  вычисляется по формуле:

$$Z(x, y) = \frac{1}{4\pi} \Delta I \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{z(x, y)}{\left( (x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2(x, y) \right)^{3/2}} - \frac{H}{\left( (x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2 \right)^{3/2}} \right) dx dy,$$

где  $z(x, y)$  – уравнение поверхности  $S$ , разделяющей верхний и нижний слой;  $\Delta I = I_2 - I_1$  – скачок намагниченности на границе слоев;  $H$  – горизонтальная асимптота.

Для нахождения функции  $z(x,y)$  разработаны программы, основанные на модифицированном методе локальных поправок [Мартышко и др., 2014а]. Первоначально способ локальных поправок был предложен для приближенного решения нелинейных обратных задач гравиметрии [Пруткин, 1986]. Алгоритм основан на предположении о том, что наибольшее влияние на значение поля в некоторой точке оказывает изменение ближайшей к данной точке части поверхности  $S$ . В результате получена итерационная формула для нахождения  $z_{ij}^{n+1}$ :

$$\left( z_{ij}^{n+1} \right)^2 = \frac{\left( z_{ij}^n \right)^2}{1 + \alpha \left( z_{ij}^n \right)^2 \left( U_{ij} - U_{ij}^n \right)},$$

где  $\alpha$  – параметр регуляризации;  $\{z_{ij}^n\}$  – значения неизвестной функции  $z(x, y)$ ;  $n$  – номер итерации.

Предложенный метод не использует нелинейную минимизацию, что позволяет значительно сократить время вычислений. Алгоритм показал очень высокую скорость счета. Так для сетки 100x100 требуется 5 минут для выполнения 300 итераций, и в результате вычислений относительная погрешность восстановления поля получена ниже 0,1 процен-

та. Результаты применения метода для построения магнитной модели северо-восточной части Европы приведены в работе [Федорова и др., 2013].

**3.4.2. Результат интерпретации региональных магнитных аномалий.** Карта региональных магнитных аномалий и результаты вычислений для приполярного сектора Уральского региона в виде изолиний глубины до поверхности нижнего намагниченного слоя коры приведены на рис. 3.7. Для наглядности результат моделирования в виде трехмерной поверхности показан на рис. 3.8. Глубина залегания варьирует от 12 до 30 км. В районе Тимано-Печорской региональной отрицательной магнитной аномалии граница намагниченного слоя в нижней коре погружается до 24–30 км, а на северо-восточной окраине Восточно-Европейской платформы поднимается до 14 км. Максимальный подъем до 12–14 км происходит в Предуральском прогибе в пределах Илычевской аномалии. Под Уральскими горами происходит прогиб поверхности. Погружение имеет форму протяженного оврага и достигает глубины 22–26 км. В литосфере Западной Сибири наблюдаются более плавные изменения рельефа поверхности, чем на Тимано-Печорской плите, и глубина варьирует от 12 до 24 км.

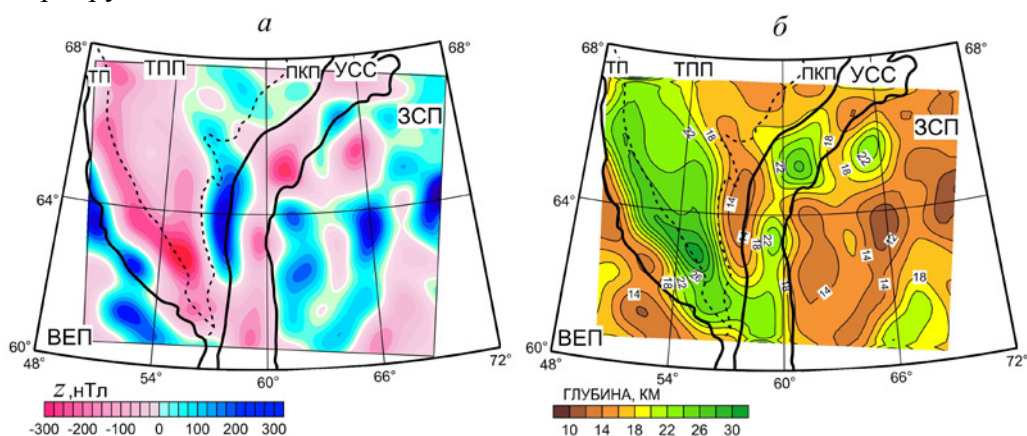


Рис. 3.7. Карты региональных магнитных аномалий (а) и поверхность нижнего намагниченного слоя земной коры (б).  
Изолинии глубин проведены через 2 км

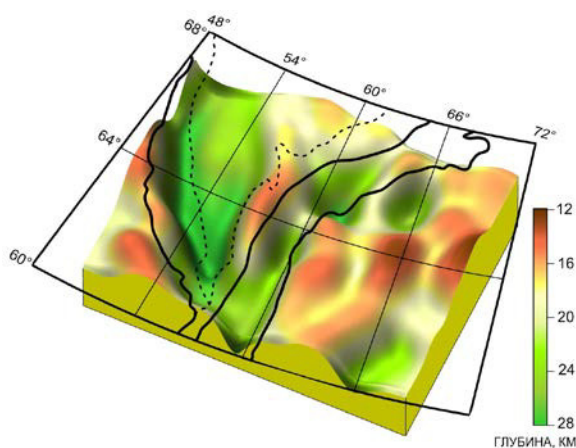


Рис. 3.8. Рельеф поверхности нижнего намагниченного слоя земной коры Уральского региона.

Границы тектонических структур показаны на горизонтальной поверхности на глубине 18 км

Поскольку на разрезах земной коры граница намагниченного слоя достаточно хорошо совпадает с положением скоростного уровня 6,5 км/с вдоль профилей ГСЗ, то можно сделать вывод, что полученные результаты интерпретации региональных магнитных аномалий дают более полное пространственное представление о рельефе границы высокоскоростного базальтового слоя земной коры.



**ПРИМЕРЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ  
(комплексные модели земной коры и верхней мантии  
приарктической части Уральского региона)**

---

---

Создание комплексной объемной геолого-геофизической модели строения земной коры и верхней мантии (верхней части литосферы, ВЧЛ) является фундаментальным направлением в науках о Земле. Геофизические и, прежде всего, сейсмические исследования показали, что геологическая среда на глубинных горизонтах имеет сложное слоисто-блоковое иерархическое строение и неоднородна как по глубине, так и по латерали [Садковский и др., 1987]. Подобная закономерность проявляется практически на всех геотраверсах и профилях глубинных сейсмических зондирований (ГСЗ), суммарная протяженность которых на исследуемой площади Уральского региона и его обрамления превышает 15000 км.

Важным интерпретационным параметром любой геофизической модели служит плотность. Именно в ней наиболее полно отражаются петрофизические особенности неоднородного строения и литологического состава горных пород. Способ и технология расчета трехмерного распределения плотности с привязкой к двумерным данным по опорным сейсмическим разрезам составляет суть настоящего этапа исследований.

Региональные геофизические модели литосферы обширных площадей формируются из нескольких, более детальных, модельных фрагментов исследуемой территории. Корректное сопоставление разномасштабных и разноглубинных 2D и 3D плотностных моделей фрагментарных участков требует специфической организации количественной информации на всех подготовительных и последующих промежуточных этапах модельных расчетов. Конвертация разноформатных входных данных к единому цифровому стандарту с их последующей математической обработкой способствует созданию новых компьютерных технологий двух- и трехмерного плотностного моделирования и быстродействующих автоматизированных алгоритмов, способных обрабатывать многомерные числовые массивы большой размерности в реальном режиме времени.

Информационная база для построения плотностной модели исследуемой территории включает три составляющие: поля времен по профилям ГСЗ и соответствующие им двумерные скоростные разрезы земной коры, эмпирическую корреляционную зависимость «скорость-плотность» и цифровые карты площадных аномалий гравитационного поля в редукции Буге. Дополнительная геолого-геофизическая информация и современные представления о развитии Урала учитывались в рамках структурных схем тектонического районирования Урала и прилегающих к нему платформ. На рис. 2.6 (глава 2) приведен фрагмент карты аномалий гравитационного поля в редукции Буге для исследуемой территории (с координатами 60–68° с.ш. и 48–72° в.д.), в сопоставлении с тектонической схемой районирования Урала по границам «надпорядковых» структур [Тектоническая ... , 2007].

Процесс построения 3D плотностных моделей по аномалиям гравитационного поля сводится к решению трехмерных прямых и обратных задач гравиметрии. Обратная задача гравиметрии в общей постановке обладает множеством неустойчивых решений. Для повышения устойчивости и снижения неоднозначности метода гравитационного моделирования необходимо привлекать плотностные модели начального приближения. Как правило, такие модели строятся по результатам интерпретации профильных сейсмических данных, и наследуют особенности двумерного распределения плотности вдоль сейсмических разрезов. Итеративная схема последовательных вычислений небольших добавок к плотностной модели начального приближения обеспечивает устойчивость решения обратной



задачи гравиметрии и сохраняет содержательность геологической интерпретации исходной сейсмической модели.

Как изложено выше (глава 2), по данным сейсмических исследований в пределах указанной территории (рис. 2.6) заново, по фондовым материалам, проведена интерпретация полей времен, построенных по первым вступлениям продольных волн, и в едином модельном представлении рассчитаны способом двумерной сейсмической томографии градиентные скоростные разрезы земной коры по фрагментам геотраверсов и профилям ГСЗ. Все скоростные разрезы дополнены границей Мохо, положение которой определено по скоростным уровням (7,75–8,25) км/с и затем откорректировано по результатам интерпретации имеющихся данных по отраженным, обменным и преломленным волнам. Погрешность построения скоростных разрезов оценивалась при сопоставлении их в местах пересечения профилей.

Переход от скоростных к плотностным разрезам осуществляется по полуэмпирической зависимости «плотность–скорость» (глава 2).

Уточнение региональных коэффициентов кусочно-линейной регрессионной зависимости «скорость–плотность» предполагает проведение дополнительных и весьма затратных петрофизических исследований на образцах горных пород [Галдин, 1977]. Мы предлагаем более простой путь – находить распределение плотности по слоям скоростной модели, исходя из решения линейной обратной задачи гравиметрии. Коэффициенты регрессии можно уточнить по всем имеющимся скоростным профилям заданного региона [Федорова и др., 2010; Цидаев, 2011]. Причем, в рамках двумерных моделей плотностных разрезов не требуется высокоточного подбора гравитационного поля; достаточно обеспечить лишь качественное совпадение морфологии спроецированных на линию профиля аномалий наблюдаемого и вычисленного полей.

В процессе моделирования анализировался гравитационный эффект от отдельных частей разреза: осадочного чехла, консолидированной земной коры и верхней мантии. Глубина разрезов соответствовала первому региональному уровню изостатической компенсации на глубине 80 км [Дружинин, 2000; Мартышко и др., 2011]. Некоторые предположения о плотности непосредственно подкорового слоя верхней мантии выдвигаются на основе данных об изменении граничных скоростей сейсмических волн на границе М (границе Мохоровичича) с использованием каких-либо априорно заданных зависимостей между скоростью и плотностью. Дополнительное граничное условие изостатической уравновешенности на глубине дает возможность при моделировании наметить контуры мантийных блоков компенсирующих масс и оптимизировать в них искомое распределение плотности. Контуры мантийных блоков определялись по остаточным (мантийным) аномалиям гравитационного поля и уточнялись по характеру изменения аномалий литостатического давления на глубинном гипсометрическом уровне 80 км.

В главе 2 изложена методика построения трехмерной модели начального приближения и результат ее применения для исследуемого региона (рис. 2.10, 2.11).

Как отмечено выше, корректное решение трехмерной задачи гравитационного моделирования требует обязательного учета единого (переменного) регионального гравитационного фона для всей территории исследования. Этот уровень меняется не только от разреза к разрезу, но и принципиально отличается для фрагментарных участков различных плотностных сегментов. Поскольку, поле отдельно взятого фрагмента вычисляется с точностью до постоянной составляющей, то возникает проблема сопоставления гравитационных аномалий от разноглубинных слоев и блоков сводной плотностной модели. Кроме того, для исключения градиентного краевого эффекта затухания расчётного поля за пределами модельной области, необходимо адекватное пространственное продолжение аномалиеобразующих масс на внешность граничного контура интерполяции исходных данных. Удлинение профилей не решает проблему в трехмерном варианте. В условиях практического отсутствия детальной информации о глубинном строении законтурного пространства необходимо было бы выполнить параметризацию масс во внешней области с

привязкой к исходным профильным значениям. Подобная процедура трудно формализуема и, даже в случае ее успешной реализации, приводит к перекосу фонового поля и образованию ложных краевых аномалий по контуру модельного планшета.

Мы предлагаем простое решение для пространственного продолжения масс за боковые грани плотностной модели и выбора закона распределения фоновой плотности (плотности относимости) для расчёта аномалий гравитационного поля. Послойная организация сеточных «грид-файлов» интерполированной плотности позволяет автоматизировать алгоритм требуемых вычислений. В качестве фоновой плотности относимости для сводной модели мы выбрали плотность, зависящую только от глубины. Она рассчитывается непосредственно по 3D начальным данным интерполированной плотности, путем усреднения ее сеточных значений в пределах каждого модельного слоя. Усредненную по горизонтальным слоям (одномерную) плотность условно можно назвать «гидростатической». Изменение гидростатической плотности с глубиной распространяется и на законтурное пространство. В этом случае вычисляемая фоновая составляющая гравитационного поля будет постоянной величиной, а его аномальная часть будет всегда отнесена к нулевому уровню. Краевой эффект продолжения масс во внешность слоя равен амплитуде гравитационной ступени на границе образующего контура. Амплитуда гравитационной ступени пропорциональна разности между фактической плотностью внутри слоя и ее усредненным значением во внешней области. Чем меньше толщина слоя (шаг дискретизации по оси глубин), тем меньше величина краевых аномалий. Как правило, знак этих аномалий меняется случайным образом при переходе от слоя к слою. Сумма по всем слоям дает статистически усредненную оценку минимального краевого эффекта.

**Обратная задача гравиметрии для 3D модели слоистых сред.** Вычисление трехмерной плотности  $\sigma(x, y, z)$  неоднородной области по заданным на множестве внешних точек значениям поля  $\Delta g$  реализуется на основе решения операторного уравнения первого рода. С математической точки зрения такая задача является некорректно поставленной, а ее решение будет сильно зависимым от малых вариаций в исходных данных поля. Но если на множестве корректности решений обратной задачи выделить класс плотностей, которые меняются только по латерали, то задача о нахождении плотности в горизонтальном слое будет вполне устойчивой [Новоселицкий, 1965; Мартышко и др., 2013]. С точки зрения дискретных матричных моделей наиболее приемлемым оказался вариант восстановления латеральной изменчивости плотности в горизонтальном слое. Плотностная модель начального приближения, организованная в виде послойных сеточных файлов интерполированной плотности, является идеальным объектом для создания устойчивых алгоритмов решения обратной задачи гравиметрии.

Разделение аномалий наблюдаемого гравитационного поля по глубине и их ассоциированная связь с глубинными объектами образует стержень интерпретационных схем задач гравитационного моделирования [Мартышко и др., 2003]. Фильтрация поля путем повысотных трансформаций с последующим аналитическим продолжением на глубину через массы неоднородного слоя, позволяет выделить из суммарного поля составляющие различных «длин волн» и соотнести их с аномалиями от глубинных неоднородностей нижележащего массива (рис. 4.1). Алгоритмическая реализация разделения полей с применением параллельных вычислений на многопроцессорном комплексе МВС-1000/32 и их связь с глубиной аномалиеобразующих объектов исследована в работе [Мартышко и др., 2014б].

Для приведения модельного поля к наблюдаемому использовался алгоритм модифицированного метода локальных поправок, дающий решение линейной обратной задачи гравиметрии в плоском слое [Мартышко, Кокшаров, 2005; Мартышко и др., 2013]. Модель разделялась на несколько горизонтальных слоев, поля от которых приравнивались разделенным аномалиям повысотных трансформант (рис. 4.1). Таким образом, задача вычисления корректирующей добавки к распределению плотности для одного слоя сводилась к

двумерному случаю и могла решаться независимо от других слоев. Это уменьшает число возможных вариантов подбора и, как следствие, повышает устойчивость решения задачи в целом.

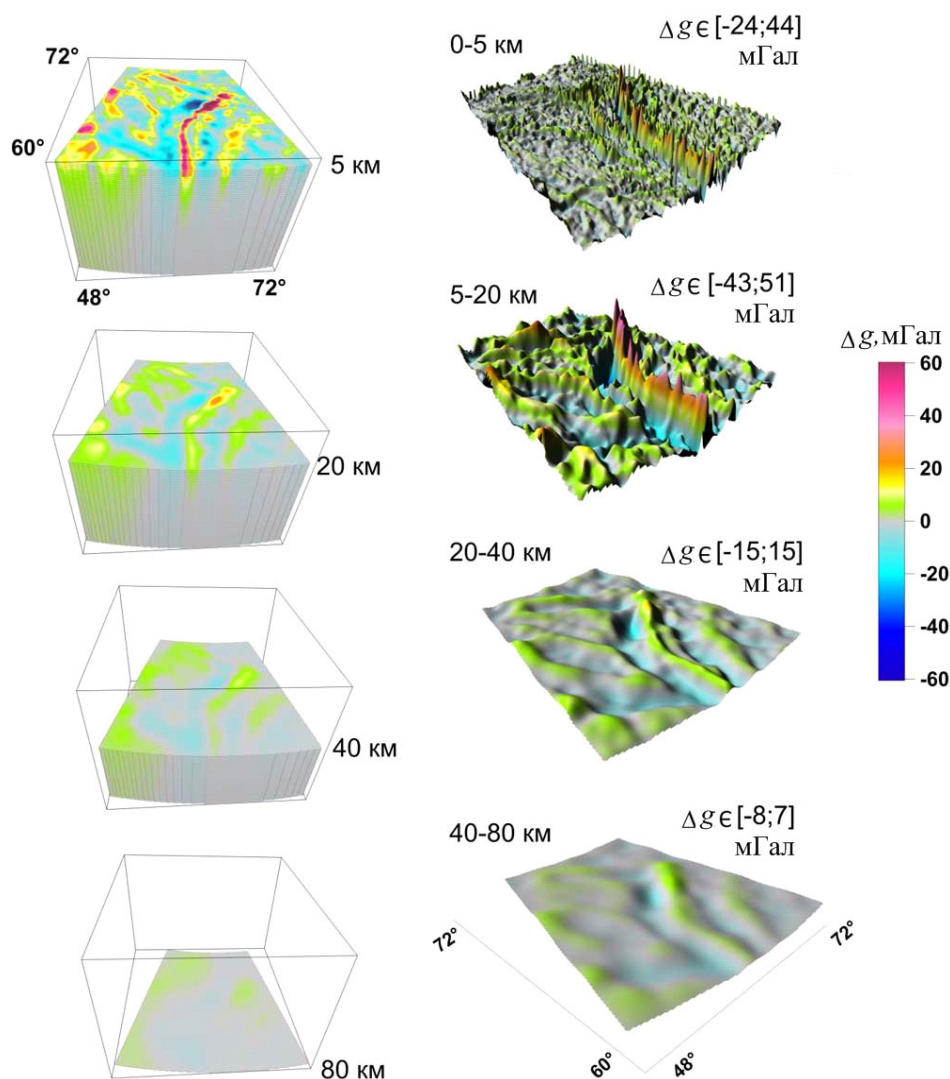


Рис. 4.1. Справа: разделение наблюдаемого поля по горизонтальным слоям с указанными амплитудой и границами по глубине. Слева: соответствующая часть куба разделенных полей ниже указанной глубины

Послойные сеточные функции корректирующих добавок вычислялась на  $1336 \times 969 \times 800$  ячейках плотностного параллелепипеда интерполированной плотности; поля разделенных аномалий задавались на горизонтальных сетках  $1336 \times 969$  для 16 высот пересчета с шагом 5 км. Дискретизация интегрального оператора обратной задачи гравиметрии приводит к матричной форме задачи СЛАУ большой размерности: матрица неизвестных содержит примерно  $10^9$  элементов; матрица интегрирования – более  $1,3 \cdot 10^{15}$  элементов; матрица поля –  $10^9$  элементов. Задача СЛАУ подобной размерности требует привлечения значительных вычислительных мощностей. Поэтому было проведено распараллеливание алгоритма вычислений. Так время расчёта плотностной матрицы на одном стандартном процессоре с тактовой частотой до 3 ГГц составило бы более 42 суток; на двух GPU NVidia GTX Titan Black – около 30 часов.

Для решения системы линейных уравнений (СЛАУ) использовался итерационный метод локальных поправок с выбором адаптивного коэффициента сжимаемости обратного оператора [Мартышко и др., 2013]. Это существенное преимущество при решении СЛАУ

большой размерности, поскольку не требует использования нелинейных методов минимизации и дополнительного параметра регуляризации по Тихонову. Сопоставление дисперсий невязки поля для ряда последовательных приближений показывает, что уже после 20-й итерации амплитуда невыбранных остатков поля уменьшается по сравнению с начальной моделью более чем в 40 раз.

Устойчивый алгоритм послойной линейной инверсии реализован в классе двумерных корректирующих добавок с нулевым средним значением. Плотность физической модели восстанавливается мультипликативной функцией гидростатической плотности нормальной модели и латеральной корректирующей добавки. В таком случае, характер изменения подобранной плотности по глубине остается неизменным. На рис. 4.2 построено искомое распределение послойно-подобранной плотности.

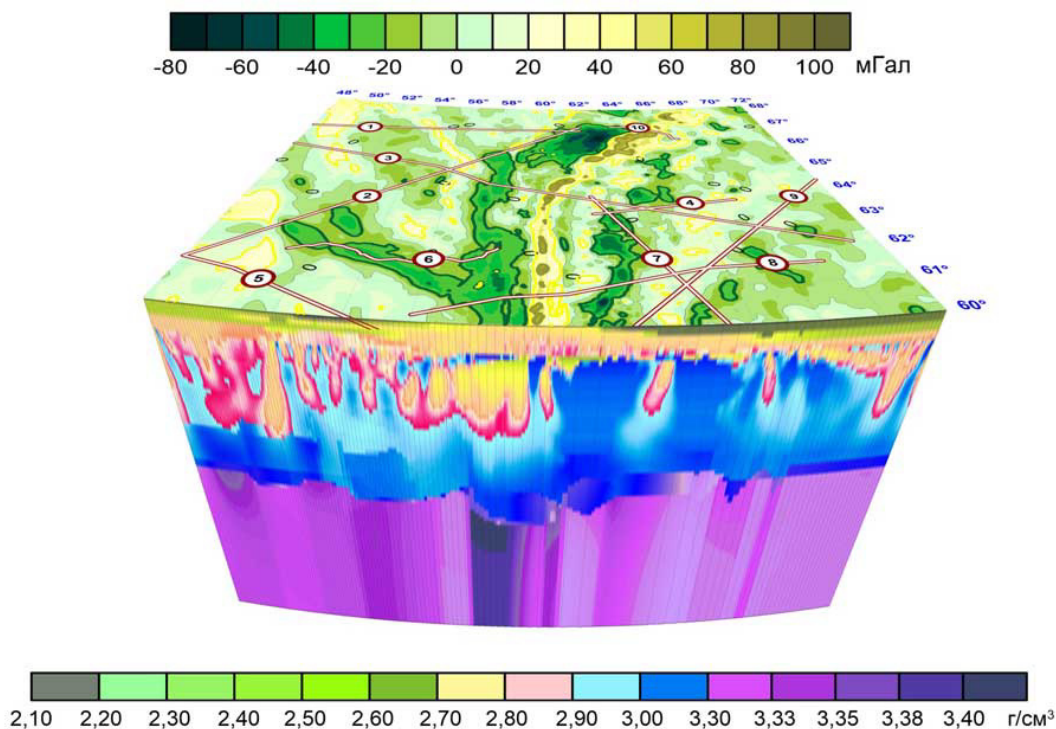


Рис. 4.2. Трехмерная плотностная модель литосферы, построенная по отфильтрованным аномалиям повысотных трансформант. Модельное поле (в виде наложенной карты) тождественно наблюдаемому. Обозначение профилей см. на рис. 2.6

Из общего четырехмерного массива скоростных (или плотностных) данных возможно извлечение любых массивов меньшей размерности для построения карт горизонтальных срезов и структурных карт исходных скоростных и подобранных плотностных границ. По аналогии с начальной моделью интерполированной скорости искомые сеточные решения обратной задачи гравиметрии можно наглядно представить в виде послойной модели цифрового параллелепипеда или его отдельных частей, что весьма удобно для последующей геолого-геофизической интерпретации. Например, о характере распределения подобранной плотности на конкретных глубинах можно судить по горизонтальным срезам, представленным на рис. 4.3.

Как видно, структура срезов в верхней части земной коры существенно меняется при переходе от скоростной модели интерполированных значений к подобранной трехмерной плотностной модели. Детали структурных особенностей скоростной модели, в основном, утрачиваются. В подобранной плотностной модели сохраняется лишь региональный тренд, подчеркивающий различие в строении платформ западно-уральского и восточно-уральского обрамления. На больших глубинах (в нижней коре и верхней мантии) структу-



ра глубинных срезов практически не меняется. Это связано с особенностями алгоритма решения линейной обратной задачи гравиметрии по разделенным аномалиям.

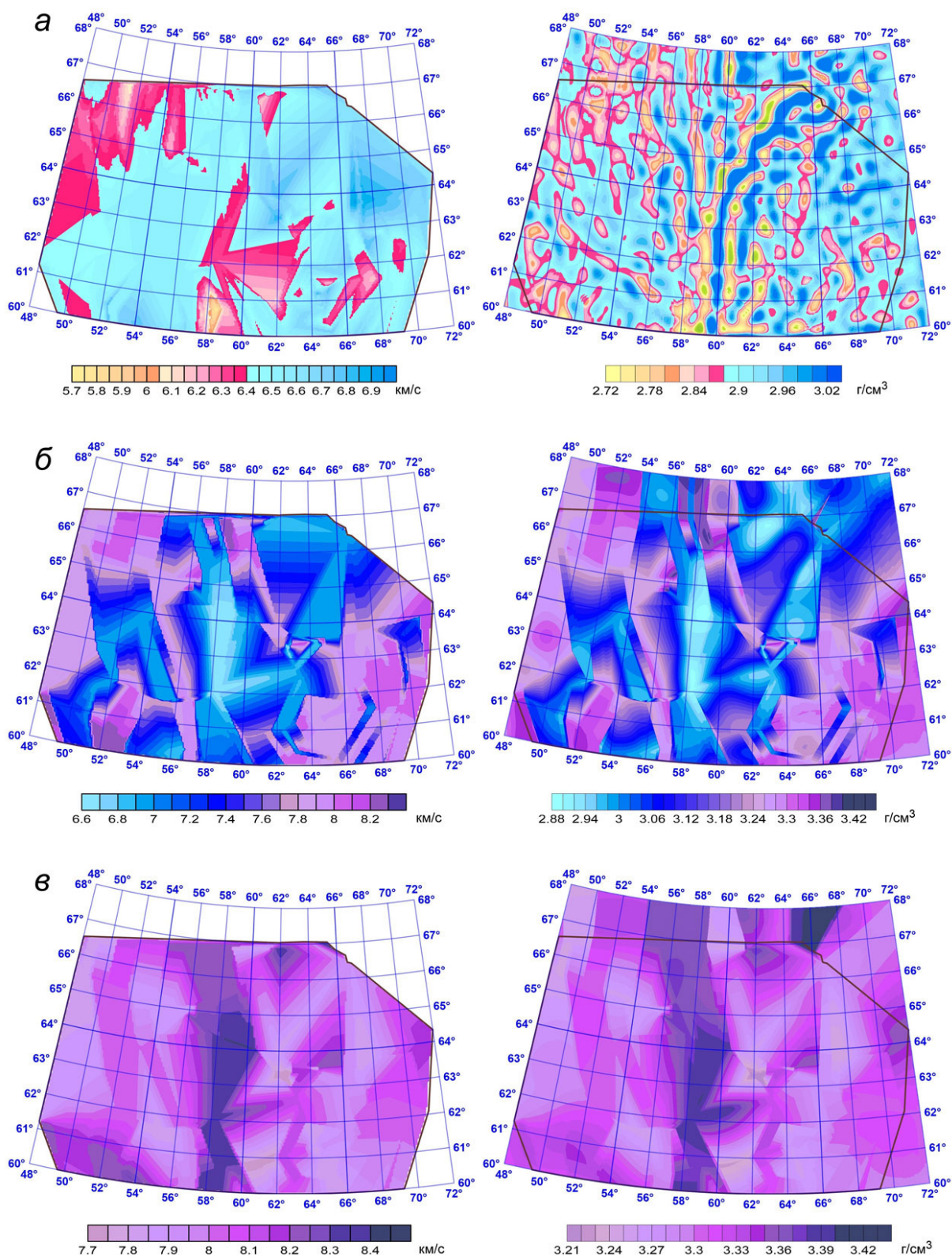


Рис. 4.3. Срезы трехмерной скоростной модели в пределах интерполяционного контура (слева) на глубинах: 20 км (а), 40 км (б), 60 км (в); справа показаны сечения подобранной плотностной модели на тех же глубинных горизонтах. На плотностные срезы нанесен контур интерполяции исходных данных

Специально следует оговорить, что между распределением плотности в слоях подобранной 3D модели (рис. 4.2, 4.3) и разделенными аномалиями гравитационного поля (рис. 4.1) наблюдается морфологическое подобие. По полям повысотных трансформант независимо друг от друга восстанавливаются горизонтальные прослойки подобранных плотностей на соответствующих глубинах. В алгоритме метода локальных поправок используется локально одномерная по глубине схема итеративных вычислений плотности (отсюда и название метода). Поэтому морфология разделенных полей в той или иной степени будет воспроизводиться в рельефе плотностных границ искомого решения. Это обусловлено тем, что мощность модельных слоев и размеры элементарной ячейки сеточного разбиения сопоставимы с геометрическими размерами высокоградиентных зон локальных аномалий, каждая из которых выделяется не менее чем по трем точкам.

Градиентная плотностная модель является приближением к реальному строению земной коры. При решении задач тектонического районирования возникает необходимость перейти от трехмерного распределения плотности континуальной модели к некоторому содержательному набору структурных геологических границ, с постоянной или переменной плотностью. Разделение литосферного слоя на отдельные сейсмоструктурные комплексы предусматривает и соответствующее разделение полей гравитационной модели. Сеточный формат полученного выше решения обеспечивает простоту алгоритмической реализации и физическую наглядность ожидаемого результата.

**Сеточные модели сейсмоструктурных поверхностей.** Упорядоченные элементы модели литосферных слоев организованы в иерархическую систему слоисто-блоковых структурных комплексов. Структурные схемы сейсмических горизонтов, с привязкой по глубине к интервальным значениям изменения граничных скоростей и плотностей, являются неотъемлемым технологическим элементом задач тектонического районирования. По характерному скачку сейсмических и плотностных параметров прослеживают две основные, регионально выдержанные структурные границы – поверхность фундамента и поверхность Мохо. Положение кровли консолидированного фундамента определялось перепадом скоростных уровней (5,6–6,8) км/с; положение кровли мантии – уровнями (7,75–8,45) км/с. Алгоритм построения структурных поверхностей по интервальным значениям входных параметров реализован в варианте бланкирования сеточных функций интерполированной скорости  $V(x, y, z)$  (или подобранной плотности  $\sigma(x, y, z)$ ) вне заданного интервала глубин  $\Delta z(x, y)$ .

Для выделения структурной поверхности  $z(x, y, V)$  из четырехмерного массива 3D скоростной модели, производится выборка интервальных значений данных в диапазоне  $(V_{\min} - V_{\max})$  с последующей пересортировкой извлеченного массива по глубине:

$$z(x, y, V) = \inf_{(z)} [(V(x, y)); V_{\min} \leq V(x, y) < V_{\max}], z > 0.$$

Выборочный интервал изменения скорости относится к породам нижележащего слоя. После сортировки в выборке остаются минимальные значения параметров сеточных ячеек, примыкающих к искомой границе. Отметки глубин приграничных элементов воспроизводят рельеф структурной поверхности  $z(x, y, V_{\min})$ . Извлечение данных по алгоритму «выборки» выполнено в следующих скоростных диапазонах: для границы фундамента  $(V_{\min} - V_{\max}) = (5,6-6,8)$  км/с для границы М –  $(V_{\min} - V_{\max}) = (7,75-8,42)$  км/с. Аналогичные построения выполнены и по интервальным значениям подобранных плотностей [Бызов, Цидаев, 2015].

На рис. 4.4 (слева) представлена трехмерная сейсмоплотностная модель земной коры, «вырезанная» из общей модели подобранного плотностного параллелепипеда (рис. 4.2) по двум криволинейным поверхностям с переменной плотностью: кровле консоли-



дированного фундамента и кровле верхней мантии. На рис. 4.4 (справа) показаны схемы изогипс рельефа внутренних границ земной коры, выделенных по постоянному значению плотности (сверх – вниз): верхняя кора ( $\sigma = 2,8 \text{ г/см}^3$ ,  $V_p > 6,0 \text{ км/с}$ ); средняя кора ( $\sigma = 2,88 \text{ г/см}^3$ ,  $V_p > 6,4 \text{ км/с}$ ); нижняя кора ( $\sigma = 2,95 \text{ г/см}^3$ ,  $V_p > 6,75 \text{ км/с}$ ).

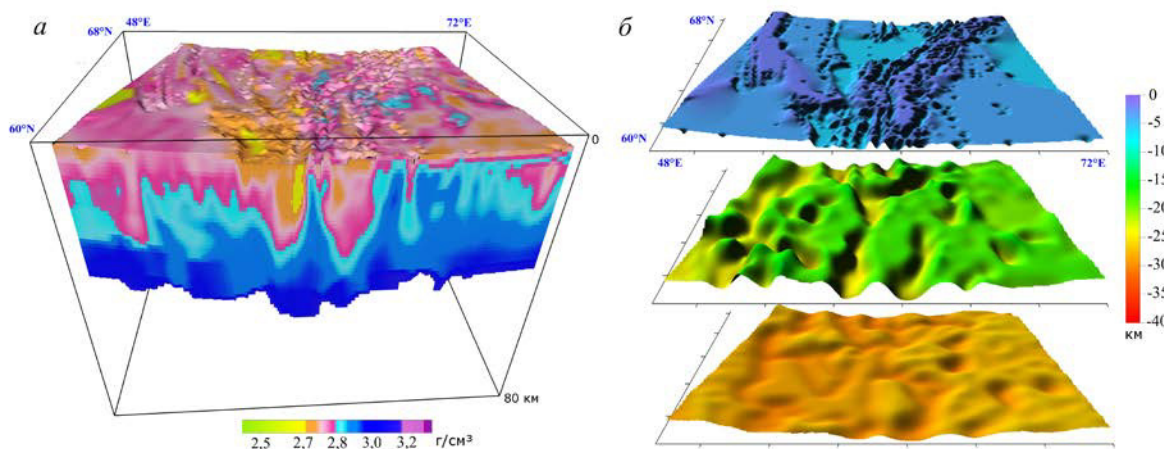


Рис. 4.4. Трехмерная сейсмоплотностная модель земной коры, ограниченная кровлей фундамента и кровлей верхней мантии (а) и схемы рельефа изоплотностных поверхностей раздела верхней средней и нижней земной коры (б)

Контуры структурно-формационных зон, выделенные по потенциальным полям, и количественная гравитационная модель верхней части земной коры (рис. 4.3, 4.4, б) имеют общую методологическую основу – трехмерное распределение плотности в приповерхностных горизонтах. Обобщенные элементы тектонических схем и, прежде всего, границы «надпорядковых» структур, прослеживаются и в формах рельефа границы М. Это прямое следствие принятой нами гипотезы региональной изостатической компенсации для вычисления плотности мантийных блоков. Условием региональной изостазии, преимущественно, объясняются и антиформы изогипс рельефа структурно-формационных зон, выделенных по кровле фундамента и кровле верхней мантии в процессе гравитационного моделирования.

**Гравитационная модель структурированных слоев.** Выделенные выше границы сейсмоструктурных поверхностей условно разделяют литосферный слой на три неоднородных плотностных фрагмента: осадочный чехол, кристаллическую земную кору и верхнюю мантию. Последовательное исключение сеточных элементов подобранной трехмерной плотностной модели в интервалах глубин между указанными поверхностями позволяет выделить плотностные неоднородности структурированных слоев. Гравитационный эффект для каждого из них рассчитывается в рамках модели криволинейного пласта с переменной плотностью.

Для вычисления гравитационного поля от разнесенных по глубине неоднородных плотностных слоев, изначально следует определить понятие «переменная плотность вмещающей среды» для отдельного плотностного фрагмента, а затем плотность относимости нормальной модели приравнять к поинтервальному распределению гидростатической плотности внутри каждого слоя.

Зависящая от глубины плотность относимости дает более представительные оценки для избыточной плотности аномальных масс. На рис. 4.5 показан закон изменения с глубиной минимальных, максимальных и средних (гидростатических) значений плотности, рассчитанных по горизонтальным слоям результирующей 3D плотностной модели.

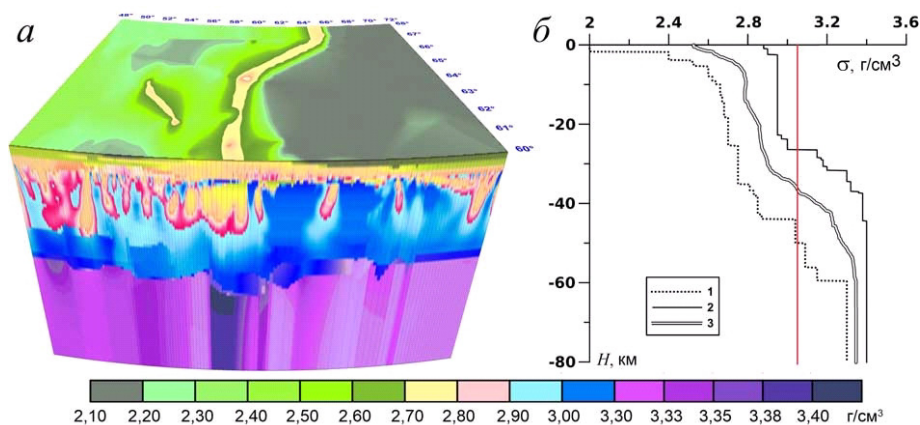


Рис. 4.5. Цифровой параллелепипед трехмерной сеточной функции подобранных плотностей и график изменения по глубине «гидростатической» плотности  $\sigma_0(z)$  нормальной модели (кривая 3). Здесь же приведены графики минимальных (кривая 1) и максимальных (кривая 2) значений плотности по горизонтальным срезам плотностной модели. Красная линия соответствует значению средневзвешенной плотности  $\sigma_{cp} = 3,09 \text{ г/см}^3$ , вычисленной до глубины 80 км

Как видно из рис. 4.5, плотности по глубине меняется в достаточно широких пределах:  $(2,0-3,4) \text{ г/см}^3$ . Такому диапазону переменных значений невозможно сопоставить одну постоянную средневзвешенную (или иную) плотность, адекватно описывающую гравитационные модели отдельных фрагментарных частей неоднородного слоя. Вместе с тем, изменение максимальных и минимальных значений плотности литосферного слоя, в общих чертах, повторяет «гидростатическая» плотность  $\sigma_0(z)$  нормальной модели. Поэтому она дает более представительные оценки для избыточной плотности аномальных масс на разных глубинах.

Сравнительно с редукцией на некоторую постоянную плотность, надгидростатические добавки избыточной плотности имеют существенно меньшую амплитуду и минимизируют компенсационные составляющие расчетного поля от фрагментов неоднородного слоя на любой глубине [Бызов, Цидаев, 2015]. На рис. 4.6 представлена подобранная плотностная модель, разделенная по кровле фундамента и кровли верхней мантии на три неоднородных слоя с криволинейными границами. Здесь же приведены расчетные аномалии гравитационного поля от выделенных структурных комплексов.

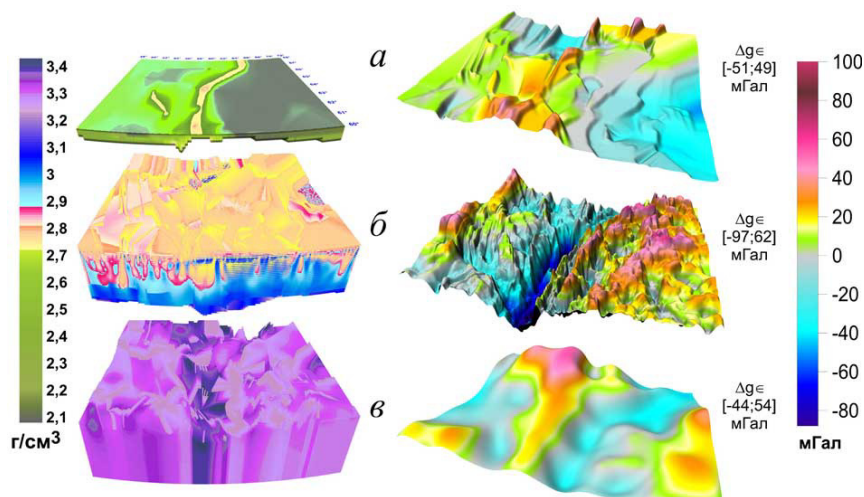


Рис. 4.6. Трехмерная плотностная модель региона (слева), разделенная по поверхности кровли кристаллического фундамента и кровли верхней мантии: осадочный чехол (а); кристаллическая кора (б); верхняя мантия (в). Справа показаны разделенные аномалии полей, вычисленных по плотности, избыточной по отношению к одномерному распределению «гидростатической» плотности нормальной модели

Построенная поверхность фундамента (рис. 4.4, *a*) в пределах Тимано-Печерской плиты отождествляется с подошвой палеозойских осадочно-вулканогенных образований и соответствует рифейскому фундаменту, а в приуральской части Западно-Сибирской плиты она прослеживается по нижней границе промежуточного комплекса доюрского основания. В обнаженной части Урала поверхность фундамента выходит на земную поверхность, но далее погружается в северо-восточном направлении в интервале глубин (0,2–6,5) км. Начиная с Приуральского прогиба Западно-Сибирской плиты, промежуточный комплекс перекрыт низкоскоростными и, соответственно, низкоплотными осадочными отложениями мезокайнозойского возраста со значениями скоростей продольных волн  $V_p = (2,4–2,7)$  км/с. Пространственное положение осадочного чехла, выклинивающегося к структурам обнаженного Урала по кровле консолидированного фундамента, показано на рис. 4.7. Распределение плотности в приповерхностной осадочной толще соответствует параметрам результирующей плотностной модели. Избыточная плотность вычислялась относительно одномерной (гидростатической) зависимости (рис. 4.5, *б*). Поле расчетных аномалий осадочного чехла мезокайнозоя (рис. 4.7, *б*) коррелируется с рельефом его основания.

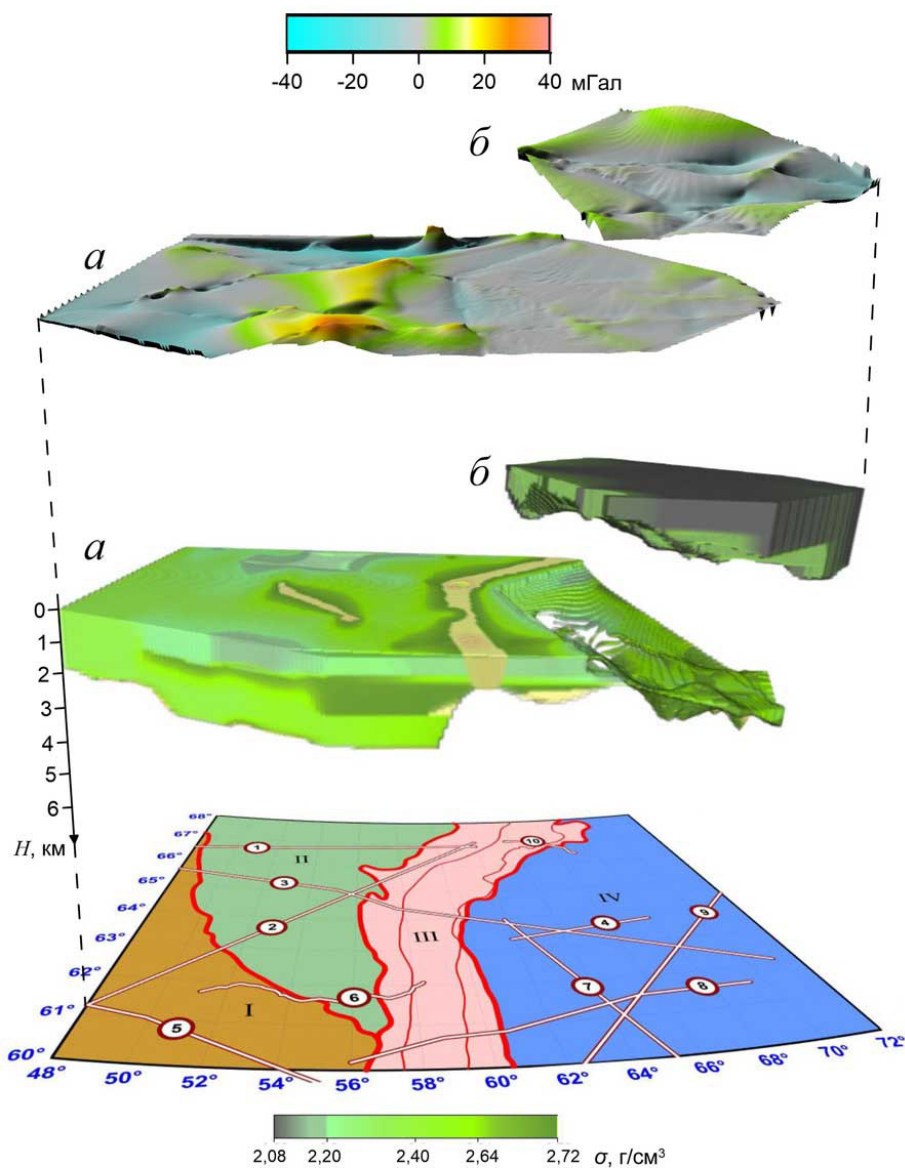


Рис. 4.7. Плотностная модель осадочного чехла, двуслойной в пределах ЗСП, совмещенная с тектонической картой структурного районирования.

Над фрагментированной моделью показаны соответствующие аномалии гравитационного поля:

*a* – от осадочного чехла (без мезо-кайнозойского комплекса ЗСП);

*б* – от низкоплотного мезокайнозойского чехла

Рельеф сейсмических структурных поверхностей уточняется по результатам гравитационного моделирования. Методика интерпретации основана на решении обратной задачи гравиметрии для контактных поверхностей. Отсутствие фоновой составляющей поля в предложенной нами гравитационной модели криволинейных слоев, позволяет корректно рассчитать гравитационные эффекты от различных частей неоднородной плотностной модели и сопоставить аномалии разделенных слоев с полями структурных границ на любом глубинном горизонте.

**Регрессионные соотношения для региональных параметров 3D сейсмодлотностной модели.** Плотностная модель начального приближения строилась на основе предположения о зависимости между скоростью продольных сейсмических волн и плотностью пород, единой для всей территории и заданной в виде кусочно-линейной функции для двух интервалов значений скорости. Сопоставление подобранной плотностной и исходной скоростной модели позволяет уточнить регрессионные зависимости «скорость–плотность» и проследить изменчивость коэффициентов уравнений линейной регрессии для пород различных геологических провинций.

Линейные зависимости «плотность–скорость» построены для четырех зон: Восточно-Европейской платформы (ВЕП), Уральского складчатого пояса (УСП), Западно-сибирской плиты (ЗСП), Тимано-Печерской плиты (ТПП); зависимости вычислены отдельно для пород осадочного чехла, кристаллической земной коры и верхней мантии. Результаты приведены в табл. 4.1. Графики соответствующих зависимостей и «облака точек» исходных данных для каждого участка приведены на рис. 4.8–4.11.

Таблица 4.1

Параметры регрессионной зависимости «скорость–плотность»  
 $\sigma = a \cdot V + b$  для пород исследуемой территории

Слой	Зона	Кол-во точек	Коэффициент корреляции	<i>a</i>	<i>b</i>
Чехол	ВЕП	16880	0,898	0,167	1,714
	ТПП	22625	0,975	0,195	1,622
	УСП	20452	0,950	0,206	1,580
	ЗСП	43042	0,993	0,196	1,611
Кора	ВЕП	236335	0,918	0,204	1,574
	ТПП	330948	0,915	0,201	1,601
	УСП	323367	0,805	0,187	1,691
	ЗСП	563754	0,875	0,193	1,645
Мантия	ВЕП	278329	0,902	0,156	2,048
	ТПП	375114	0,923	0,238	1,398
	УСП	288492	0,862	0,208	1,647
	ЗСП	668717	0,878	0,228	1,474

Объединение регрессий по трем основным слоям верхней литосферы – осадочный чехол, земная кора и верхняя мантия позволяет в едином формате построить кусочно-линейные зависимости «плотность–скорость» применительно к различным геологическим структурам Урала и его платформенного обрамления.



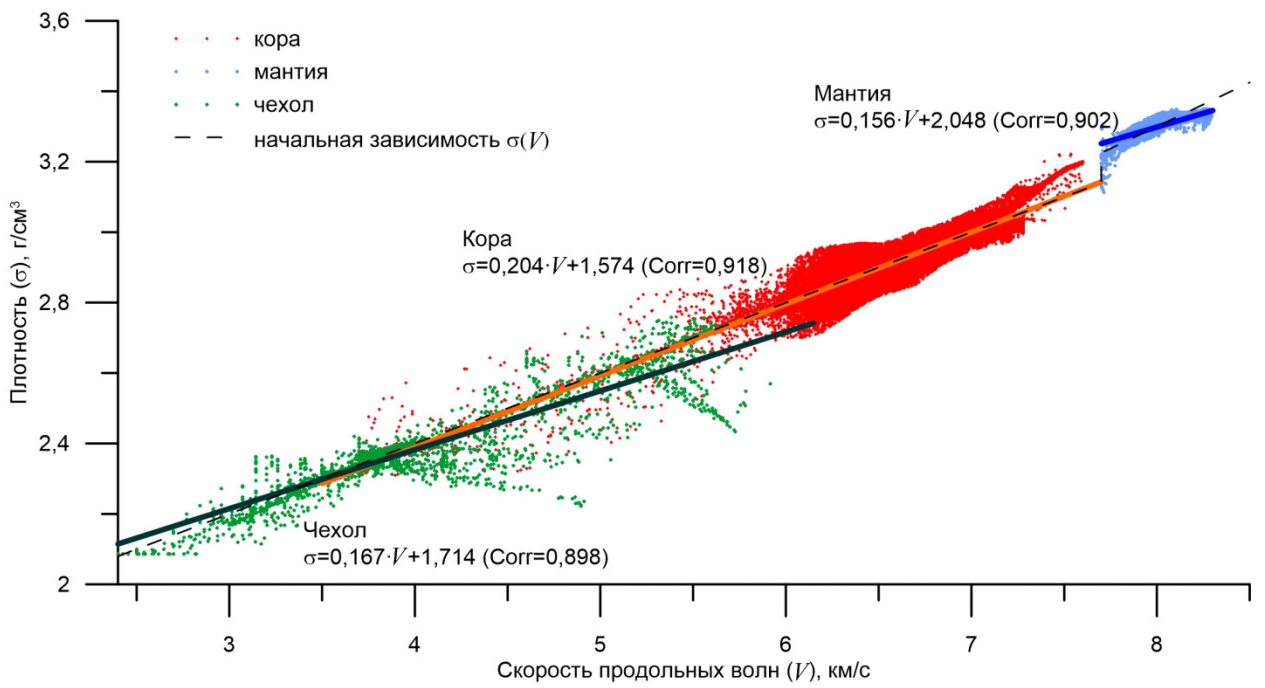


Рис. 4.8. Уточнение зависимости между скоростью продольных сейсмических волн и плотностью пород для Восточно-Европейской платформы (БЕП)

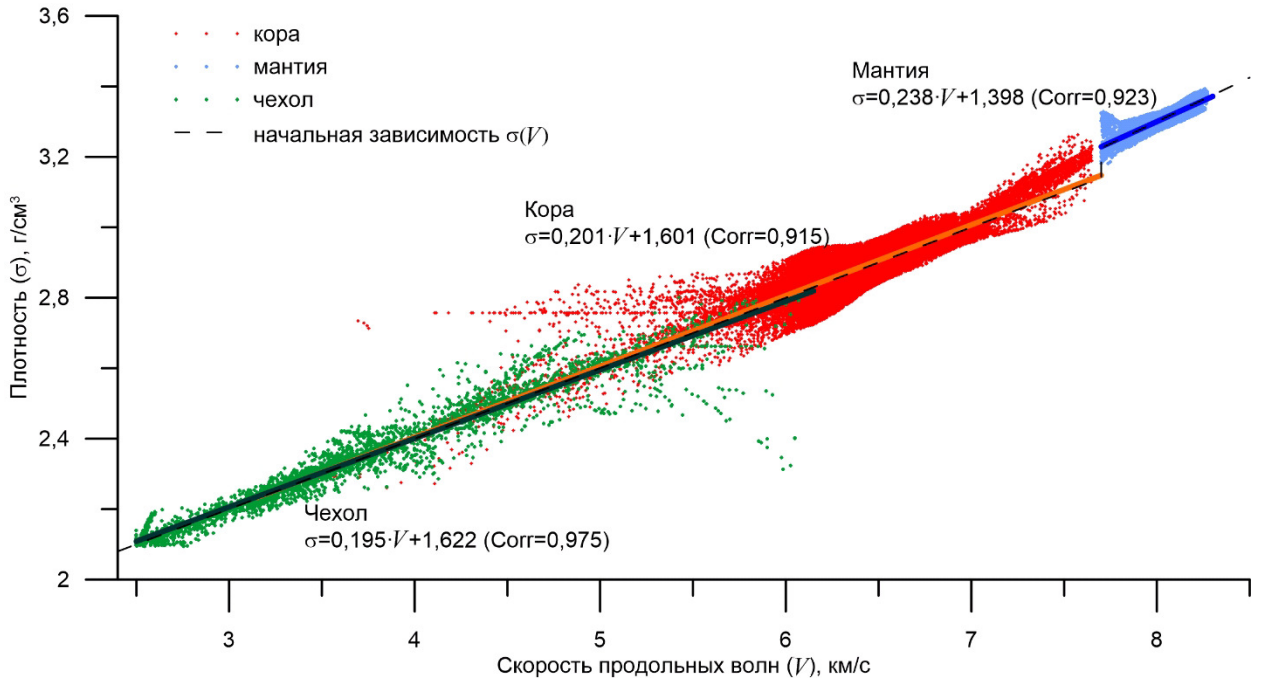


Рис. 4.9. Уточнение зависимости между скоростью продольных сейсмических волн и плотностью пород для Тимано-Печерской плиты (ТПП)

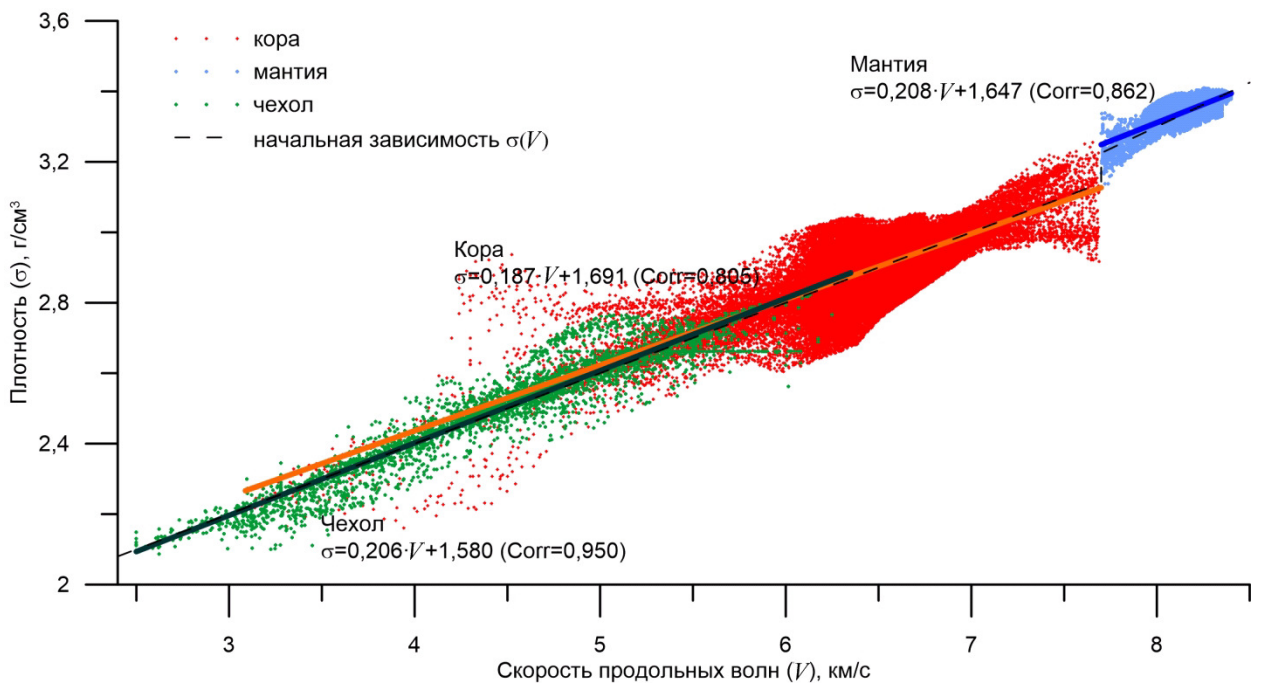


Рис. 4.10. Уточнение зависимости между скоростью продольных сейсмических волн и плотностью пород для Уральского складчатого пояса (УСП)

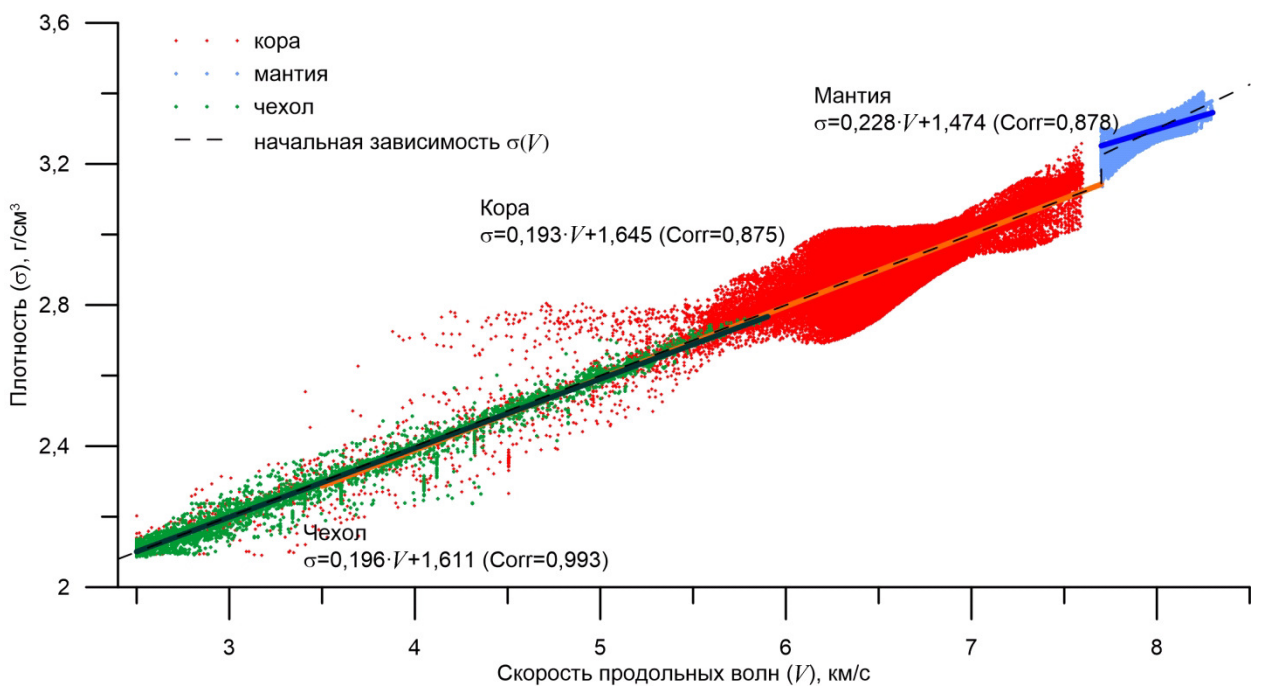


Рис. 4.11. Уточнение зависимости между скоростью продольных сейсмических волн и плотностью пород для Западно-сибирской плиты (ЗСП)



**Картирование ультрабазит-базитовых массивов в верхних горизонтах фундамента.** Большая часть исследуемой территории покрыта осадочным чехлом. Из сопоставления геологической карты и карт аномального магнитного и гравитационного полей над обнаженной частью Урала видно, что использовать эти данные трудно для обнаружения в верхней части фундамента крупных массивов габро и ультрабазитов. Наблюдаемые поля имеют интегральный характер, и большой вклад вносят глубинные массивы земной коры.

Для выделения базит-ультра-базитовых массивов в верхней части кристаллической коры были проведены трансформации аномального магнитного и гравитационного полей и выделены локальные аномалии. Для этого была использована следующая методика. На начальном этапе решается задача о выделении эффекта источников в слое от земной поверхности до некоторой глубины  $H$ . Поле продолжается вверх на уровень  $H$ , при этом влияние локальных приповерхностных источников значительно ослабевает.

Для того чтобы окончательно избавиться от влияния локальных источников, находящихся в горизонтальном слое от дневной поверхности до глубины  $H$ , пересчитанное вверх поле затем продолжается вниз на глубину  $H$ . Поскольку задача относится к классу некорректно поставленных задач, необходимо использовать методы с применением регуляризации. На последнем шаге поле пересчитывается вновь вверх на уровень дневной поверхности  $H = 0$ . Полученное поле можно рассматривать как поле от источников, расположенных ниже границы  $H$ . После вычисления разности наблюдаемого и трансформированного полей получаем аномалии от локальных источников, расположенных в верхнем слое. Аналогично, поля от источников, расположенных в различных горизонтальных слоях, можно получить, выполнив расчеты для разных значений  $H$ .

При изучении крупных территорий приходится задавать большие массивы данных, что приводит к значительным затратам времени при вычислениях на однопроцессорных компьютерах. Использование параллельных алгоритмов для многопроцессорных вычислительных систем значительно сокращает время расчетов. Создана компьютерной технология, основанная на параллельных вычислениях.

На рис. 4.12 приведено построение карты магнитных аномалий от слоев земной коры.

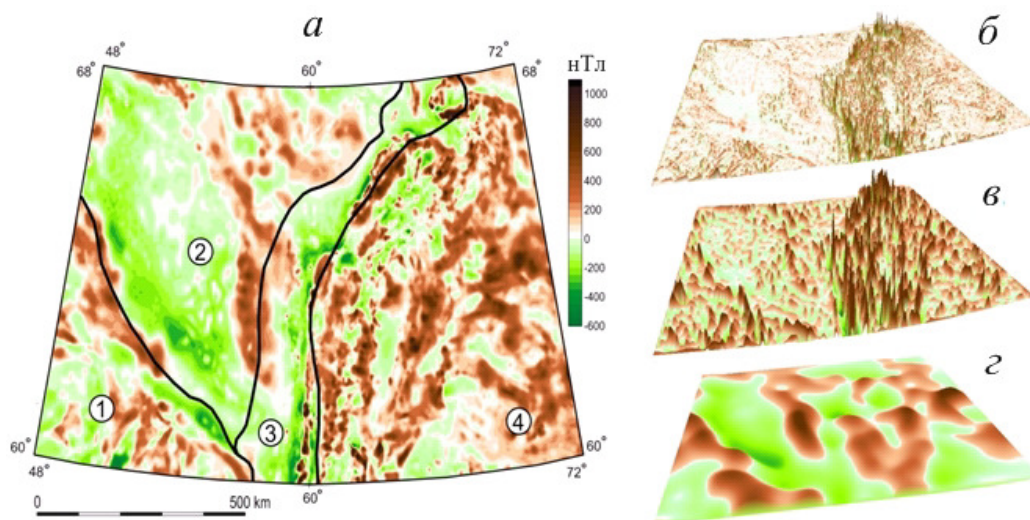


Рис. 4.12. Сектор Евразии. Разделение магнитных аномалий от источников в различных слоях земной коры.

Карты магнитного поля:  $a$  – исходное аномальное;

$b$  – локальные аномалии от верхнего слоя 5 км;  $в$  – аномалии от источников, расположенных в слое на глубине от 5 до 5–20 км;  $г$  – региональные аномалии.

Границы тектонических структур показаны черными линиями:

1 – Восточно-Европейская платформа (ВЕП), 2 – Тимано-Печерской плита (ТПП),  
3 – Уральская складчатая система (УСС), 4 – Западно-Сибирская плита (ЗСП)

На рис. 4.13, *а* приведена геологическая карта Полярного и Приполярного Урала, востока Тимано-Печорской плиты и северо-восточной части Западной Сибири. Карты аномального магнитного и гравитационного полей для этой территории приведены на рис. 4.13, *б* и 4.13, *в*.

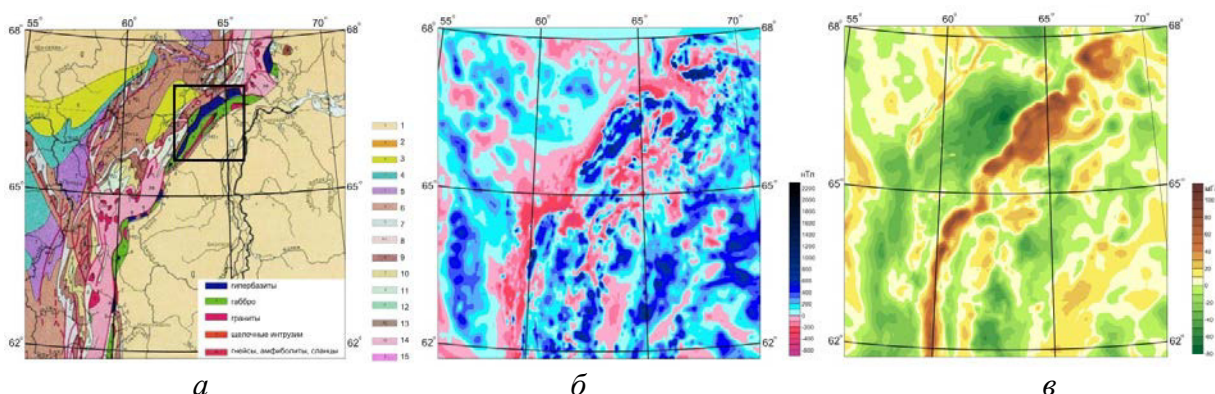


Рис. 4.13. Полярный, Приполярный Урал и северо-восточная часть Западной Сибири.  
Карты: *а* – геологическая; *б* – аномального магнитного поля; *в* – гравитационного поля

Результаты сопоставления локальных аномалий от верхнего слоя земной коры и геологического картирования иллюстрируются для участка над крупными массивами Полярного Урала, выделенного на геологической карте прямоугольником (рис. 4.13). Использована геологическая карта Q-41 масштаба 1:1 000 000 ВСЕГЕИ (рис. 4.14). Выделенные локальные положительные магнитные аномалии уверенно прослеживаются над гипербазитовыми и габбро массивами. В большинстве случаев контуры этих аномалий практически совпадают с результатами геологического картирования. Гравитационные аномалии имеют более сложное распределение.

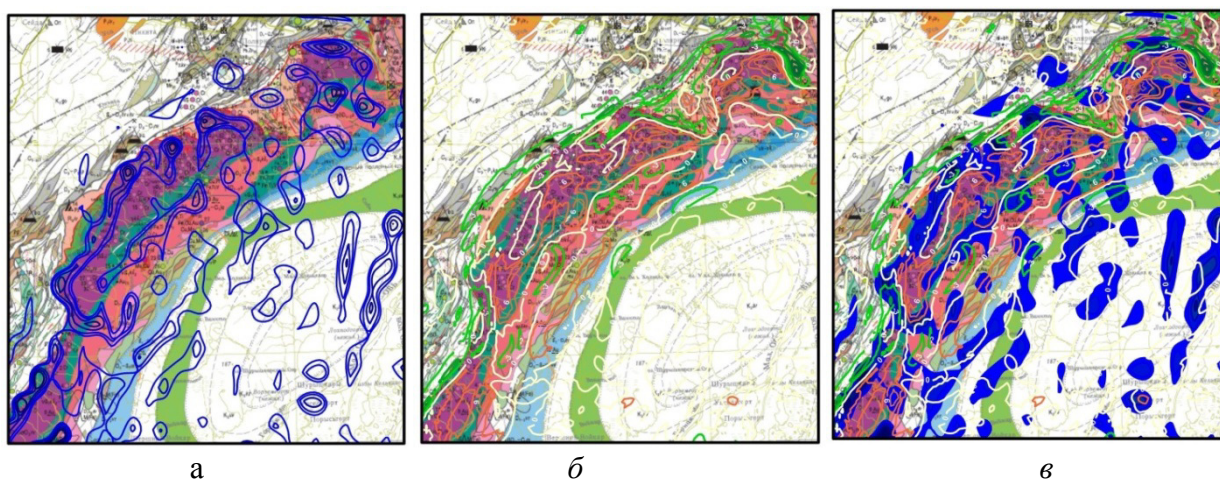


Рис. 4.14. Фрагмент геологической карты Полярного Урала и локальные аномалии:  
*а* – магнитного поля; *б* – гравитационного поля; *в* – магнитного и гравитационного полей.  
Изолинии магнитных положительных аномалий проведены синим цветом.  
Изолинии гравитационных аномалий показаны цветами:  
нулевая – белый, положительные – коричневый, отрицательные – зеленый

Как правило, над краями массивов расположены слабые отрицательные аномалии, а над центральными частями – более интенсивные положительные аномалии. Это отражает различные процессы метаморфизма пород. Хорошо известно, что при серпентинизации ультрабазитов происходит уменьшение плотности пород и обогащение магнитными минералами. Серпентинизация с образованием магнетита более активно происходит в



краевых частях массивов и по разломам. Поэтому для картирования базит-ультрабазитовых массивов на закрытых площадях лучше использовать карты локальных магнитных аномалий. Отметим, что над гранитными массивами выделены слабые отрицательные гравитационные аномалии (3–6 мГал), причем контуры нулевой изолинии достаточно хорошо совпадают с границами массивов. В плутонах на Южном, Среднем и Северном секторах Урала граниты обладают слабыми магнитными свойствами, над ними наблюдается спокойное магнитное поле. Лишь небольшие магнитные аномалии обнаружены над интрузиями основных пород, внедренных в эти массивы.

Для всей территории Полярного, Приполярного Урала и прилегающих территорий Тимано-Печерской провинции и Западной Сибири карты локальных магнитных и гравитационных аномалий приведены на рис. 4.15, *а*. На основании этих данных построена карта базит-ультра-базитовых массивов в верхней части фундамента.

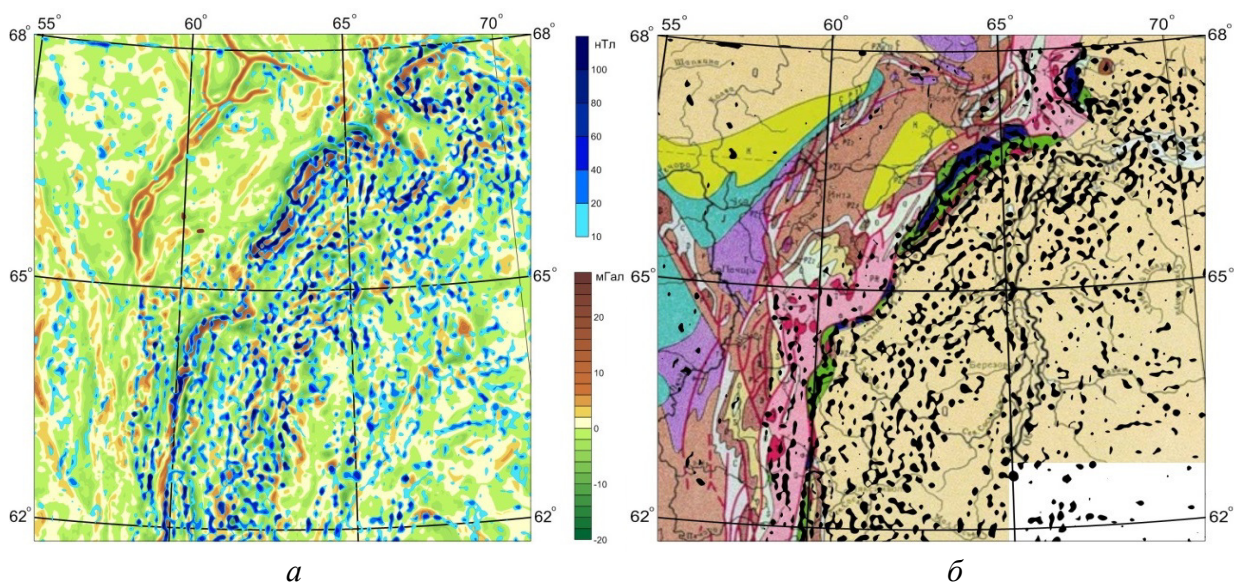


Рис. 4.15. Полярный, Приполярный Урал и северо-восточная часть Западной Сибири:  
*а* – карта локальных магнитных и гравитационных аномалий;  
*б* – геологическая карта с нанесенными контурами базит-ультра-базитовых массивов в верхней части фундамента под осадочными покровами

**Восстановление вертикальной компоненты напряженности магнитных аномалий, аппроксимация регионального магнитного поля Приполярного и Полярного Урала и определение его вертикальной составляющей.** При выполнении магнитных съемок в основном используется аппаратура, измеряющая абсолютные значения модуля геомагнитной индукции  $T$ , поэтому аномальное магнитное поле литосферы представлено модульными значениями  $\Delta T_a$ . Функция  $\Delta T_a$  не гармоническая. Для корректного применения методов решения трехмерных обратных задач магнитометрии требуется провести преобразование и определить вертикальную составляющую магнитного поля  $V_z$ . Разработан алгоритм вычисления вертикальной составляющей аномального магнитного поля по распределению его абсолютного значения. Преобразование основано на аппроксимации аномалий модуля магнитной индукции набором сингулярных источников и последующим вычислением вертикальной компоненты магнитного поля от подобранного распределения источников [Бызов, Муравьев, 2015].

В качестве модельных источников использован набор стержней, однородно намагниченных вдоль своей оси. Для решения данной задачи проведено исследование применимости различных методов нелинейной оптимизации: Флетчера – Ривса, Поляка – Рибьера,

Хестенса – Штифеля, Дай – Юаня. Для устойчивой сходимости метода и сохранения некоторого физического смысла (например, отрезки не могут располагаться выше поверхности точек измерения поля) решение искалось на выпуклом компактном множестве в рамках заданных постоянных ограничений на параметры. Применялся метод проекций. Метод был реализован в многопоточной программе на языке Си, которая использует вычислительные возможности современных графических процессоров (GPU) NVidia, опираясь на библиотеку CUDA и ее расширение cuBLAS.

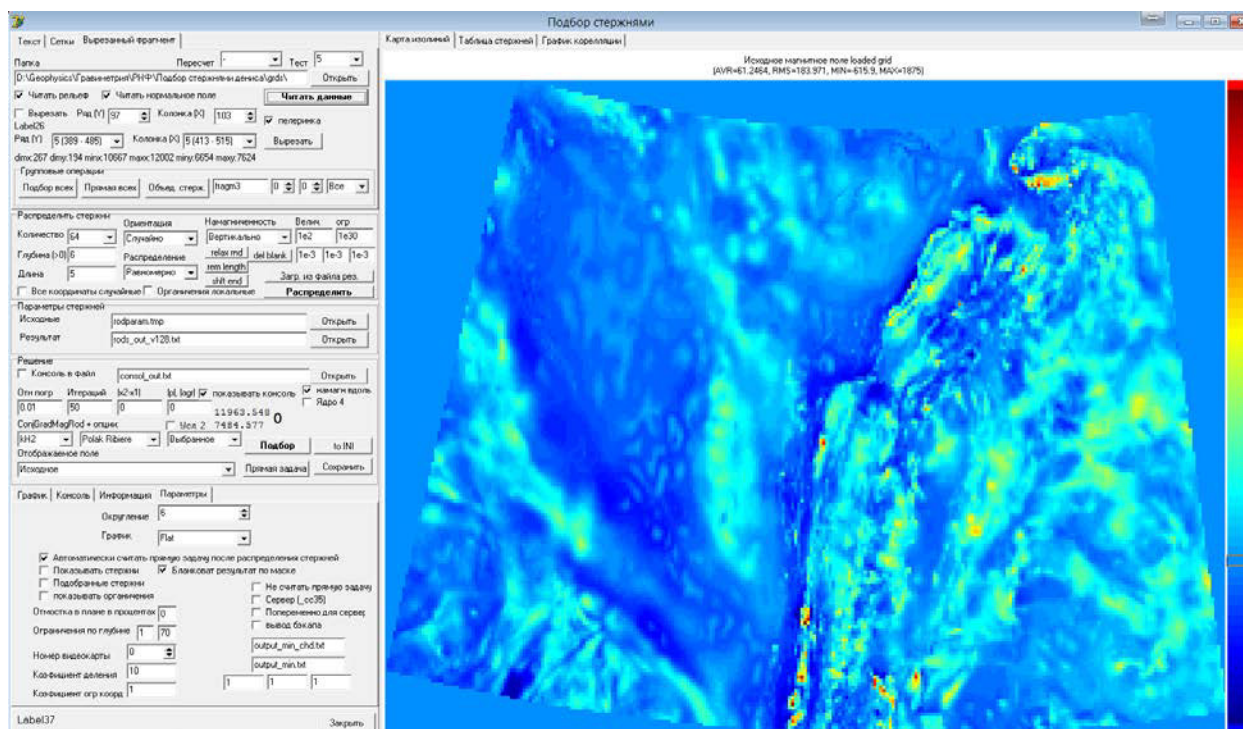


Рис. 4.16. Интерфейс программы «Подбор стержнями»

Алгоритм реализован с помощью технологии параллельных вычислений. Интерфейс программы «подбор стержнями» показан на рис. 4.16. Для всей исследуемой территории, включающей Приполярный и Полярный Урал, проведена аппроксимация аномального магнитного поля  $\Delta T_a$  и определена его вертикальная составляющая  $V_z$ .

На рис. 3.5 (глава 3) приведены карты подобранного модуля аномального магнитного поля исследуемого участка и вычисленной вертикальной компоненты от подобранной системы стержней. Поскольку визуально карты почти неотличимы на рис. 3.5,  $z$  приведена разность этих компонент, которая достигает значений  $\pm 400$  нТл.

Результаты выполненной работы опубликованы в статье [Бызов, Муравьев, 2015].

**Определение примерного положения источников гравитационных аномалий в верхней мантии.** Разработанная методология подбора стержнями магнитного поля может быть с успехом реализована для подбора гравитационного поля с помощью аналогичного класса модельных плотностных объектов. В этом случае постоянная линейная намагниченность стержня заменяется постоянной линейной плотностью. Набор параметров каждого отрезка аналогичный – координаты концов и величина массы. Прямая задача гравиметрии для отрезка решается просто и в элементарных функциях, а процесс подбора является более устойчивым и сходится гораздо быстрее, чем в случае подбора магнитного поля. Минимизируемый функционал является суммой квадратов разностей



исходной  $z$ -компоненты напряженности гравитационного поля в каждой точке и вычисленного поля от системы отрезков.

Применялась минимизация на основе метода сопряженных направлений, модификация Поляка–Рибьера в данном случае также показала более быструю сходимость по сравнению с другими проанализированными методами. Решение определялось в рамках заданных ограничений на параметры. Процедура вычислений реализована в рамках описанной выше программы «подбор стержнями».

Данным методом 422-мя отрезками, расположенными между глубинами 40 и 80 км, для исследуемой области было подобрано (с относительной погрешностью менее 2 %) поле  $\Delta g$ , заданное на горизонтальной плоскости на глубине 0 км, полученное методом высотных трансформаций полного наблюдаемого поля в редукции Буге для глубины 40 км (рис. 4.17). Мы полагали, что указанное поле соответствует вкладу масс в слоях ниже 40 км, а значит пространственное положение аппроксимирующих отрезков является первым приближением источников аномалий в верхах мантии.

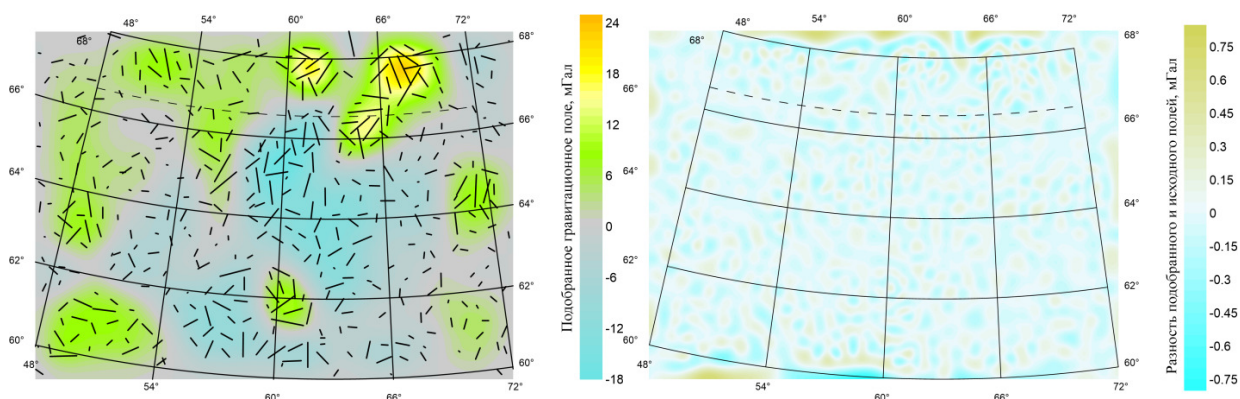


Рис. 4.17. Аппроксимация гравитационного поля набором сигнулярных источников: слева – выбранное поле и проекция отрезков на плоскость наблюдения; справа – оценка качества подбора: разность аппроксимируемого и выбранного полей

**Региональная модель распределения намагниченности в земной коре и рельеф нижнего намагниченного слоя.** Созданная компьютерная технология, включающая методы разделения полей, вычисление вертикальной компоненты геомагнитного поля и решения трехмерной обратной задачи модифицированным методом локальных поправок, применена для построения региональной модели распределения намагниченности в земной коре приарктической части Уральского региона.

В пределах Уральских гор близко к поверхности земли находятся кристаллические породы. Массивы, содержащие в большом количестве породы основного и ультраосновного состава, создают интенсивные локальные положительные аномалии. Длинноволновая часть магнитного поля состоит из цепочки отрицательных аномалий (рис. 4.18).

Исследования показали, что выделенные региональные аномалии нельзя объяснить изменениями рельефа кровли и подошвы кристаллической коры. Результаты моделирования распределения скорости сейсмических волн и намагниченности в литосфере вдоль профилей ГСЗ в пределах региона позволили разделить земную кору по магнитным свойствам на два слоя: верхний – с низкой намагниченностью (менее 0,3 А/м) и нижний – с высокой средней намагниченностью (2–4 А/м). Средняя глубина до границы раздела слоев составляет 20 км. Рельеф границы хорошо совпадает на сейсмических разрезах с положениями скоростного уровня 6,5 км/с (граница «базальтового слоя»).

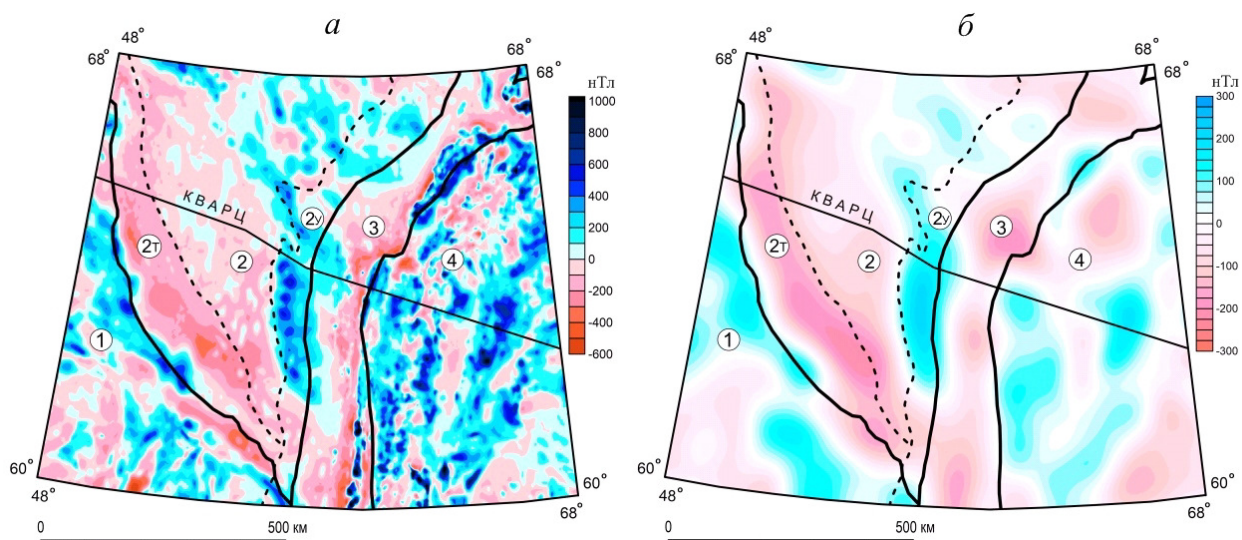


Рис. 4.18. Карты магнитного поля: аномального (а); регионального (б).

Границы тектонических структур:

1 – ВЕП; 2 – ТПП; 2Т – Тиманское поднятие; 2У – Предуральский краевой прогиб; 3 – УСС; 4 – ЗСП

На Урале и в Западной Сибири в верхнем слое кристаллической коры выделено большое количество намагниченных блоков различных размеров. На восточной границе Уральского орогена и Западно-Сибирской плиты отчетливо прослеживается падение намагниченных источников на восток. По-видимому, они связаны с глубинным разломом и имеют корни в виде крупного блока в средней коре. Магнитная модель для уральского участка профиля ГСЗ Кварц приведена на рис. 4.19.

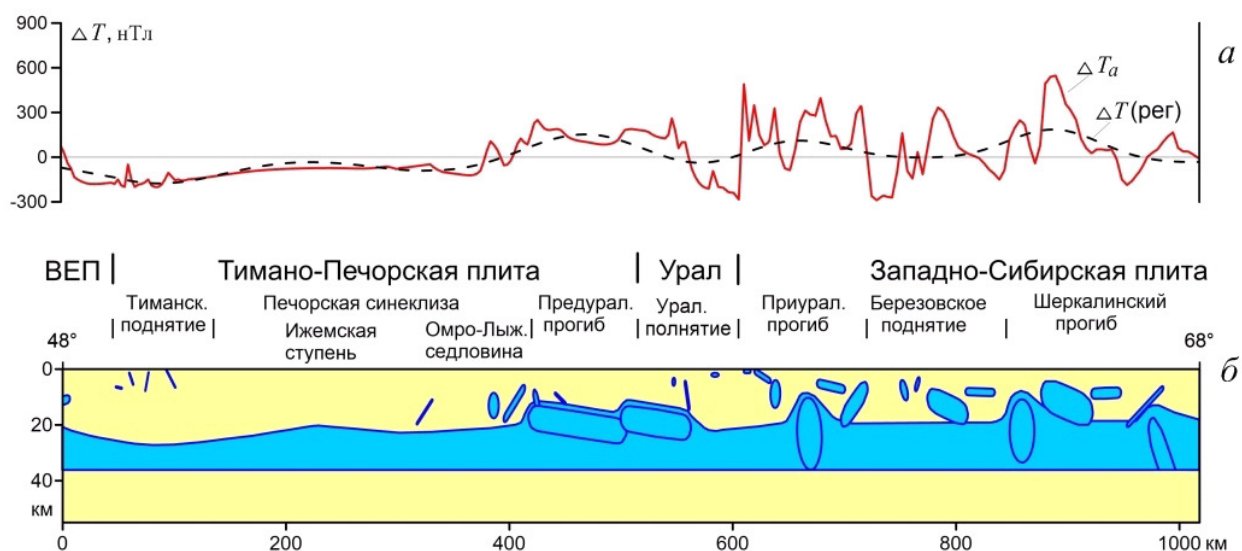


Рис. 4.19. Магнитная модель для участка профиля ГСЗ Кварц: графики аномального магнитного поля и региональной составляющей (а); модель распределения намагниченности в земной коре (б).  
Контур магнитных источников рассчитаны для намагниченности 3 А/м

На основании этих результатов для региональных магнитных аномалий проведено трехмерное моделирование поверхности нижнего слоя земной коры, основанное на реше-



нии трехмерной обратной задачи магнитометрии модифицированным методом локальных поправок [Martyshko et al., 2015]. Рельеф построенной поверхности приведен на рис. 4.20.

Наиболее контрастными границами в литосфере по физическим параметрам, таким как плотность и скорости упругих волн, являются граница кристаллического фундамента и граница Мохо. Внутри коры при переходе от слоев содержащих преимущественно кислые породы к слоям из основных и ультраосновных пород изменения этих физических свойств могут быть не значительные. При этом, как показывают исследования, контраст намагниченности может быть значительным и достигать 2–6 А/м. Это позволяет учитывать результаты магнитного моделирования в комплексной модели и задавать границу «базальтового слоя» по результатам интерпретации регионального магнитного поля. По результатам этих исследований опубликована статья [Колмогорова Федорова, 2015].

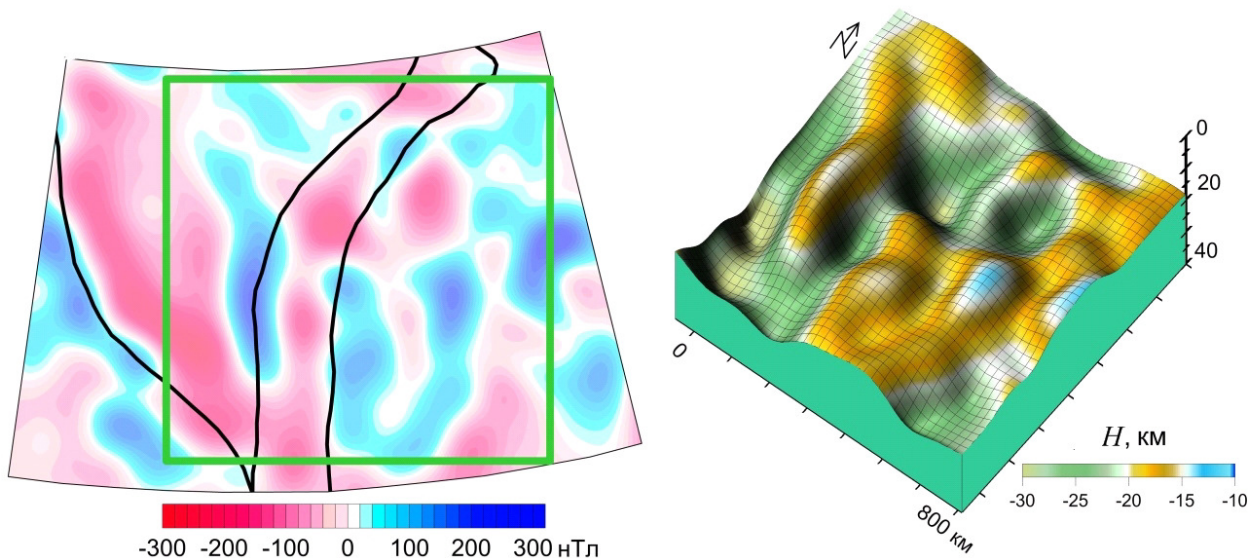


Рис. 4.20. Карта региональных магнитных аномалий и результат моделирование поверхности кровли нижнего намагниченного слоя земной коры для скачка намагниченности 3 А/м

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

---

На основе новых сеточных алгоритмов разработан метод интерпретации гравитационных (и магнитных) аномалий (выделение локальных неоднородностей): по выделенным аномалиям от источников, разделённым по горизонтальным слоям, строится трехмерное распределение плотности (намагниченности) в изучаемом объёме среды в формате сеточных функций. Процесс построения плотностных моделей сводится к решению прямых и обратных задач гравиметрии. Разработаны оригинальные высокоэффективные алгоритмы «быстрого» решения прямой задачи гравиметрии на сетках больших размерностей, которые применены для успешной реализации функциональных и итерационных схем решения обратных задач. Поиск решений осуществляется на практически содержательных множествах корректности при разумном выборе плотностных моделей начального приближения. Предложено простое решение для пространственного продолжения масс за боковые грани плотностной модели и выбора закона распределения фоновой плотности (относимости) для расчёта аномалий гравитационного поля.

На основе идеи локальных поправок разработаны итерационные алгоритмы с адаптивной регуляризацией для устойчивого решения линейной и нелинейной (структурной) трёхмерной обратной задачи гравиметрии и предложена оригинальная методика послойной коррекции плотности в неоднородном параллелепипеде. Методика была реализована в компьютерной системе интерпретации гравитационных данных, применительно к реальным задачам сейсмоплотностного моделирования. Все этапы интерпретации и обработки данных интегрированы в один программный продукт. Процесс начинается с построения трехмерной плотностной модели начального приближения по сейсмическим разрезам и заканчивается корректировкой плотности по авторской методике решения задачи гравитационного моделирования. Дополнительное граничное условие изостатической уравновешенности на глубине дает возможность при моделировании наметить контуры мантийных блоков компенсирующих масс и оптимизировать в них искомое распределение плотности. Контуры мантийных блоков определялись по остаточным (мантийным) аномалиям гравитационного поля и уточнялись по характеру изменения аномалий литостатического давления на глубинном гипсометрическом уровне 80 км.

На тестовом примере повышенной сложности продемонстрирована работоспособность алгоритма линейной инверсии, а его быстродействие и эффективность доказаны при решении практических задач по созданию объёмных геолого-геофизических моделей земной коры и верхней мантии для обширных участков исследуемой территории Уральского региона.

Разработаны алгоритмы и программы аппроксимации гравитационных и магнитных данных полями сингулярных источников.

Для построения сейсмоплотностной модели приполярной части Урала и сопредельных регионов использованы результаты интерпретации данных по сейсмическим профилям ГСЗ и фрагментам протяженных геотраверсов (одиннадцать профилей, расположенных в пределах изучаемой трапеции с географическими координатами 60–68° с.ш., 48–72° в.д.): градиентные скоростные разрезы в формате сеточных функций, построенные по полям времен. Обосновано преимущество использования сеточных скоростных разрезов для решения обратных задач гравитационного моделирования.

В результате интерпретации магнитных данных показано, что выделенные региональные магнитные аномалии нельзя объяснить изменениями рельефа кровли и подошвы кристаллической коры. Результаты моделирования распределения скорости сейсмических волн и намагниченности в литосфере вдоль профилей ГСЗ в пределах региона позволили разделить земную кору по магнитным свойствам на два слоя: верхний – с низкой намаг-

ниченностью (менее 0,3 А/м) и нижний – с высокой средней намагниченностью (2–4 А/м). Средняя глубина до границы раздела слоев составляет 20 км. Рельеф границы хорошо совпадает на сейсмических разрезах с положениями скоростного уровня 6,5 км/с (граница «базальтового слоя»). На Урале и в Западной Сибири в верхнем слое кристаллической коры выделено большое количество намагниченных блоков различных размеров. На восточной границе Уральского орогена и Западно-Сибирской плиты отчетливо прослеживается падение намагниченных источников на восток. По-видимому, они связаны с глубинным разломом и имеют корни в виде крупного блока в средней коре.

По результатам комплексной интерпретации сейсмических, гравитационных и магнитных данных созданы трехмерные модели распределения плотности и намагниченности верхней части литосферы и построены карты блочного строения земной коры региона на разных глубинах.

Представленные выше результаты направлены на совершенствование технологии построения геолого-геофизических моделей земной коры и верхней мантии, что и подчеркивает их актуальность при постановке практически важных задачах изучения глубинного строения нефте- и газоперспективных регионов.

*Результаты исследований, изложенные в монографии, получены в Институте геофизики им. Ю.П. Булашевича УрО РАН за счет гранта Российского научного фонда (проект РНФ № 14-27-00059).*

Авторы выражают благодарность всем коллегам – членам коллектива гранта РНФ: А.Л. Рублеву, В.С. Дружинину, В.В. Колмогоровой, Л.А. Муравьеву, В.А. Пьянкову, В.Ю. Осипову, М.П. Мартышко, Д.В. Гемайдинову, В.Е. Мисилову, Н.В. Кошелевой за плодотворное сотрудничество.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Акимова Е.Н., Гемайдинов Д.В.* Параллельные алгоритмы решения задачи гравиметрии о восстановлении плотности в слое // Труды института математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13. № 3. С. 3–21.
- Афанасьев Н. С.* Корреляция плотности и скорости продольных волн в горных породах Воронежского кристаллического массива // Вопросы геологии и металлогении докембрия Воронежского кристаллического массива. Воронеж: Воронежский государственный университет, 1976.
- Бызов Д.Д., Муравьев Л.А.* Вычисление вертикальной компоненты геомагнитного поля с помощью аппроксимации его модуля системой намагниченных отрезков // Уральский геофизический вестник. 2015. № 2(26). С. 24–28.
- Бызов Д.Д., Цидаев А.Г.* Методика построения 2D плотностной модели верхней мантии с учетом условия изостатической компенсации на глубине // Уральский геофизический вестник. 2015. №1(25). С. 33–36.
- Бычков С.Г.* Методы обработки и интерпретации гравиметрических наблюдений при решении задач нефтегазовой геологии. Екатеринбург: Горный институт УрО РАН, 2010. 187 с.
- Голдин Н.Е.* Физические свойства глубинных метаморфических и магматических пород при высоких давлениях и температурах М.: Недра, 1977. 127 с.
- Голов И.Н., Сизиков В.С.* Обратная задача гравиметрии с использованием сфероидов, нелинейного программирования и регуляризации // Геофизический журнал. 2005. Т. 27. № 3. С. 454–462.
- Государственная геологическая карта Российской Федерации масштаба 1:1000000 Уральская серия, лист Р-41 (третье поколение). СПб.: ВСЕГЕИ, 2007а.*
- Государственная геологическая карта Российской Федерации масштаба 1:1000000 Уральская серия, лист Q-41 (третье поколение). СПб.: ВСЕГЕИ, 2007б.*
- Государственная геологическая карта Российской Федерации масштаба 1:1000000 Западно-Сибирская серия, лист Q-42 (третье поколение). СПб.: ВСЕГЕИ, 2011.*
- Государственная геологическая карта Российской Федерации масштаба 1:1000000 Западно-Сибирская серия, лист Р-42 (третье поколение). СПб.: ВСЕГЕИ, 2014.*
- Гравиразведка.* Справочник геофизика. Изд. 2-е, перераб. и доп. / Под ред. Е.А. Мудрецово́й, К.Е. Веселова. М.: Недра, 1990. 607 с.
- Дружинин В.С., Автонец С.В., Шарманова Л.Н., Турыгин Л.В.* Глубинное строение Северного Урала по Красноленинскому профилю ГСЗ // Отечественная геология. 1990. № 9. С. 79–82.
- Дружинин В.С., Каретин Ю.С., Начапкин И.И., Бахвалов А.Н.* Разработка методики объемного моделирования верхней части литосферы Урала // Уральский геофизический вестник. 2000. № 1. С. 56–60.
- Дружинин В.С., Карманов А.Б.* Изучение строения земной коры северо-западной части Западно-Сибирской плиты // Советская геология. 1985. № 9. С. 39–48.
- Дружинин В.С., Колмогорова В.В., Начапкин И.И., Осипов В.Ю., Брехунцов А.М., Нестеров И.И., Плесовских И.А.* Карта доюрских вещественных комплексов северо-западной части Западно-Сибирской равнины на основе объемной модели земной коры // Отечественная геология. 2009. № 1. С. 104–112.
- Дружинин В.С., Мартышко П.С., Начапкин И.И., Осипов В.Ю.* Строение верхней части литосферы и нефтегазоносность недр Уральского региона. Екатеринбург: ИГФ УрО РАН, 2014. 226 с.
- Егоркин А.В.* Геологическая информативность многоволнового ГСЗ на примере изучения севера Европейской части России // Региональная геология и металлогения. 2000. № 10. С. 85–93.
- Егоркин А.В.* Строение земной коры по сейсмическим геотраверсам // Глубинное строение территории СССР / Отв. ред. В.В. Белоусов, Н.И. Павленкова, Г.Н. Квятковская. М.: Наука, 1991. С. 67–95.
- Иванов В. К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
- Карта поверхности фундамента платформенных территорий России / Под ред. Л.Н. Солодилова, С.Л. Костюченко, Н.Н. Ясюлевича. М.: ГЕОН, 2000.*

- Колмогорова В.В., Федорова Н.В.* Результаты моделирования глубинного строения земной коры уральской части геотраверса Кварц // *Геофизика*. 2015. № 6. С. 67–82.
- Костюченко С.Л., Морозов А.Ф., Кременицкий А.А.* Тимано–Урало–Пайхойская коллизийная область. М.: Геокарт-ГЕОС, 2012. 210 с.
- Костюченко С.Л., Романюк Т.В.* О природе Мезенского гравитационного максимума // *Физика Земли*. 1997. № 12. С. 3–32.
- Красовский С.С.* Гравитационное моделирование глубинных структур земной коры и изостазия. Киев: Наукова Думка, 1989. 246 с.
- Крутиховская З.А., Пашкевич И.К.* Намагничность земной коры древних щитов и региональные магнитные аномалии // *Магнитные аномалии земных глубин*. Киев: Наукова думка, 1976. С. 108–125.
- Крылов С.В., Мишенькин Б.П., Мишенькина З.Р., Петрик Г.В., Сергеев В.Н., Шелудько И.Ф., Тен Е.Н., Кульчинский Ю.В., Мандельбаум М.М., Селезнев В.С., Соловьев В.М., Суворов В.Д.* Детальные сейсмические исследования литосферы на Р- и S-волнах. Новосибирск: НАУКА, 1993. 199 с.
- Кузнецов В.Л., Сальников А.С., Канарейкин Б.А., Титаренко В.В.* Палеозой Западной Сибири в свете глубинных сейсмических исследований // *Геофизика*. 2010. № 1. С. 16–22.
- Куприенко П.Я., Макаренко И.Б., Старостенко В.И., Легостаева О.В.* Трехмерная плотностная модель земной коры и верхней мантии Украинского щита // *Геофизический журнал*. 2007. Т. 29. № 5. С. 3–27.
- Куприенко П.Я., Макаренко И.Б., Старостенко В.И., Легостаева О.В., Савченко А.С.* Трехмерная плотностная модель земной коры и верхней мантии Днепровско-Донецкой впадины и Донбасса // *Геофизический журнал*. 2010. Т. 32. № 6. С. 175–214.
- Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической геофизики. Новосибирск: СО РАН СССР, 1962. 92 с.
- Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишацкий С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
- Ладовский И.В., Мартышко П.С., Дружинин В.С., Бызов Д.Д., Цидаев А.Г., Колмогорова В.В.* Методика и результаты объемного сейсмоплотностного моделирования глубинного строения земной коры и верхней мантии на примере среднеуральского сегмента // *Уральский геофизический вестник*. 2013. № 2 (22). С. 31–45.
- Магниторазведка: Справочник геофизика*. М.: Недра, 1990. 470 с.
- Майер В.И., Никонова Ф.И., Федорова Н.В.* Численная оптимизация при интерпретации гравитационных и магнитных аномалий // *Изв. АН СССР. Физика Земли*. 1985. № 5. С. 46–57.
- Макаров Н.П.* Геодезическая гравиметрия. М.: Недра, 1968. 408 с.
- Мартышко П.С., Дружинин В.С., Начапкин Н.И., Ладовский И.В., Бызов Д.Д., Осипов В.Ю., Цидаев А.Г.* Схематическое тектоническое районирование Уральского региона на основе разработанных алгоритмов и методики создания объемной геофизической модели верхней части литосферы // *Литосфера*. 2012. № 4. С. 208–218.
- Мартышко П.С., Дружинин В.С., Начапкин Н.И., Осипов В.Ю., Фёдорова Н.В., Ладовский И.В., Колмогорова В.В., Цидаев А.Г.* Методика и результаты создания объемной геолого-геофизической модели верхней части литосферы северного и среднего сегментов Уральского региона // *Динамика физических полей Земли*. М.: ИФЗ РАН, 2011. С. 9–30.
- Мартышко П.С., Кокшаров Д.Е.* Об определении плотности в слоистой среде по гравитационным данным // *Геофизический журнал*. 2005. Т. 27. № 4. С. 678–684.
- Мартышко П.С., Ладовский И.В., Бызов Д.Д.* О решении обратной задачи гравиметрии на сетках большой размерности // *ДАН*. 2013. Т. 450. № 6. С. 702–707.
- Мартышко П.С., Ладовский И.В., Бызов Д.Д.* О решении прямой задачи гравиметрии в рамках конечно-элементного подхода // *Уральский геофизический вестник*. 2015. № 1(25). С. 42–45.
- Мартышко П.С., Ладовский И.В., Бызов Д.Д.* Об устойчивых методах интерпретации данных гравиметрии // *ДАН*. 2016. Т. 471. № 6.
- Мартышко П.С., Ладовский И.В., Колмогорова В.В., Цидаев А.Г., Бызов Д.Д.* Применение сеточных функций в задачах трехмерного плотностного моделирования // *Уральский геофизический вестник*. 2012. № 1(19). С. 30–34.
- Мартышко П.С., Ладовский И.В., Колмогорова В.В., Цидаев А.Г., Бызов Д.Д.* Особенности построения плотностных моделей при условии их изостатической уравновешенности // *Материалы*

VI научных чтений памяти Ю.П. Булашевича с международным участием. Екатеринбург: УрО РАН, 2011. С. 246–248.

*Мартышко П.С., Ладовский И.В., Цидаев А.Г.* Построение региональных геофизических моделей на основе комплексной интерпретации гравитационных и сейсмических данных // *Физика Земли*. 2010. № 11. С. 23–35. DOI англ. версии: 10.1134/S1069351310110030.

*Мартышко П.С., Пруткин И.Л.* Технология разделения источников гравитационного поля по глубине // *Геофизический журнал*. 2003. Т. 25. № 3. С. 159–168.

*Мартышко П.С., Рублев А.Л., Федорова Н.В.* Метод нахождения поверхностей намагниченных слоев земной коры // *Уральский геофизический вестник*. 2014а. № 1. С. 61–66.

*Мартышко П.С., Федорова Н.В., Акимова Е.Н., Гемайдинов Д.В.* Изучение структурных особенностей гравитационного и магнитного полей литосферы с использованием параллельных алгоритмов // *Физика Земли*. 2014б. № 4. С. 50–55. DOI:10.7868/S0002333714040097. DOI англ. версии: 10.1134/S1069351314040090.

*Мартышко П.С., Фёдорова Н.В., Гемайдинов Д.В.* Применение параллельных алгоритмов вычислений при изучении структуры аномального магнитного поля Урала // *ДАН*. 2012. Т. 446. № 2. С. 201–203. DOI англ. версии: 10.1134/S1028334X12090127.

*Мартышко П.С., Цидаев А.Г.* О решении трехмерной обратной задачи гравиметрии методом локальных поправок // *Геофизические исследования Урала и сопредельных регионов: Материалы Международной конференции, посвященной 50-летию Института геофизики УрО РАН*. Екатеринбург: ИГФ УрО РАН, 2008. С. 167–170.

*Методические рекомендации по интерпретации геофизических данных при крупномасштабном геологическом картировании / Е.М. Ананьева, Е.Б. Горонович, З.Б. Черняк и др.* Свердловск: Уралгеология, 1983. 298 с.

*Мишенькина З.Р., Шелудько И.Ф., Крылов С.В.* Использование линеаризованной обратной кинематической задачи для двумерных полей рефрагированных волн // *Численные методы в сейсмических исследованиях*. Новосибирск: Наука, 1983. С. 140–152.

*Моловичко А.К.* Методы аналитического продолжения аномалий силы тяжести и их приложения к задачам гравиразведки. М.: Гостоптехиздат, 1956. 160 с.

*Муравьев Л.А.* Применение общеземных высотных данных в геофизических исследованиях // 14th EAGE International Conference on Geoinformatics – Theoretical and Applied Aspects. Kyev, 2015 (на англ. языке). DOI: 10.3997/2214-4609.201412418.

*Муравьев Л.А., Бызов Д.Д.* Вычисление нормального магнитного поля в системе координат, связанной с проекцией Гаусса-Крюгера // 14th EAGE International Conference on Geoinformatics – Theoretical and Applied Aspects. Kyev, 2015 (на англ. языке). DOI: 10.3997/2214-4609.201412396.

*Новоселицкий В.М.* К теории определения изменения плотности в горизонтальном пласте по аномалиям силы тяжести // *Изв. АН СССР. Физика Земли*. 1965. № 5. С. 25–32.

*Нумеров Б.В.* Интерпретация гравитационных наблюдений в случае одной контактной поверхности // *ДАН СССР*. 1930. № 21. С. 569–574.

*Овчаренко А.В.* Компьютерная база геополей Урала – информационная основа нового этапа исследований региона // *Глубинное строение и развитие Урала*. Екатеринбург: Наука, 1996. С. 136–146.

*Павленкова Н.И., Егорова Т.П., Старостенко В.И., Козленко В.Г.* Трехмерная плотностная модель литосферы Европы // *Изв. АН СССР. Физика Земли*. 1991. № 4. С. 3–23.

*Петровский А.П., Федченко Т.А., Суятинов В.Н.* Быстрый алгоритм решения прямой задачи гравиметрии // *Геофизический журнал*. 2007. Т. 29. № 2. С. 141–145.

*Петрофизика: Справочник. Книга третья. Земная кора и мантия / Под ред. Н.Б. Дортман. М.: Недра, 1992. 286 с.*

*Простолупов Г.В., Новоселицкий В.М., Конешов В.Н., Щербинина Г.П.* Об интерпретации гравитационного и магнитного полей на основе трансформации горизонтальных градиентов в системе «VECTOR» // *Физика Земли*. 2006. № 6. С. 90–96.

*Пруткин И.Л.* О решении трехмерной обратной задачи гравиметрии в классе контактных поверхностей методом локальных поправок // *Изв. АН СССР. Физика Земли*. 1986. № 1. С. 67–77.

*Романюк Т.В.* Сейсмоплотностное моделирование коры и верхней части мантии вдоль геотраверса «КВАРЦ» // *Физика Земли*. 1995. № 9. С. 11–23.

*Садовский М.А., Нерсесов И.Л., Писаренко В.Ф.* Иерархическая дискретная структура литосферы и сейсмических процессов // *Современная тектоническая активность Земли и сейсмичность*. М.: Наука, 1987. С. 182–191.



*Семенов Б.Г.* О комплексировании данных сейсмометрии и гравиметрии при составлении сейсмоплотностной модели земной коры // Земная кора и полезные ископаемые Урала. Екатеринбург: УИФ Наука, 1993. С. 61–69.

*Сербуленко М.Г.* Линейные методы разделения потенциальных полей // Курс гравиразведки и магниторазведки (специальные главы) / Под ред. чл.-кор. АН СССР Э.Э. Фотиани. Новосибирск, 1966. С. 389–457.

*Соболев И.Д.* Тектоническая схема Северного, Среднего и северо-восточной части Южного Урала. М 1:2500 000. Геология СССР. Т. XII. Приложение. М., 1968.

*Соболев И.Д., Автонеев С.В., Белковская Р.П., Петрова Т.Ю., Сюткина Р.А.* Тектоническая карта Урала масштаба 1:1000 000: Объяснительная записка. Свердловск: Уралгеология, 1983. 168 с.

*Старостенко В.И.* Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. Киев: Наукова думка, 1978. 228 с.

*Страхов В.Н.* Об обратной задаче логарифмического потенциала для контактной поверхности // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1974. № 2. С. 43–65.

*Страхов В.Н., Романюк Т.В.* Восстановление плотностей земной коры и верхней мантии по данным ГСЗ и гравиметрии // Физика Земли. 1984. № 6. С. 44–63.

*Сурков В.С., Жеро О.Г.* Фундамент и развитие чехла Западно-Сибирской плиты. М.: Недра, 1993. С. 85–90.

*Сурков В.С., Кузнецов В.Л., Старосельцев В.С., Сальников А.С.* Сейсмическая томография при изучении земной коры Сибири // Региональная геология и металлогения. 2000. № 10. С. 117–123.

*Тектоническая карта России, сопредельных территорий и акваторий М 1:4000000* / Под ред. Е.Е. Милановского. М.: Картография, 2007.

*Тимонин Н.И.* Печорская плита: история геологического развития в фанерозое. Екатеринбург: УрО РАН, 1998. 239 с.

*Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 223 с.

*Федорова Н.В.* Картирование базит-ультрабазитовых массивов в верхних горизонтах фундамента приполярного сектора Евразии // Уральский геофизический вестник. 2016. № 1(27). С. 48–52.

*Федорова Н.В.* Модели намагниченности земной коры по геотраверсу Гранит // Уральский геофизический вестник. 2001. № 2. С. 88–93.

*Федорова Н.В., Колмогорова В.В.* Модели распределения намагниченности и скорости продольных волн в земной коре Тимано-Печорского и Северо-Уральского регионов // Литосфера. 2013. № 5. С. 141–150.

*Федорова Н.В., Колмогорова В.В., Ладовский И.В.* Геофизические модели строения земной коры по Краснотенинскому профилю // Уральский геофизический вестник. 2010. № 1. С. 59–68.

*Федорова Н.В., Колмогорова В.В., Рублев А.Л., Цидаев А.Г.* Магнитная модель северо-восточной части Европы // Геофизические исследования. 2013. Т. 14. № 2. С. 25–37.

*Федорова Н.В., Мартышко П.С., Гемайдинов Д.В., Рублев А.Л.* Компьютерная технология выделения магнитных аномалий от слоев земной коры и результаты ее применения для северной части Евразии // Уральский геофизический вестник. 2015. № 2(26). С. 58–66.

*Федорова Н.В., Цирульский А.В.* К вопросу о разрешимости обратной задачи логарифмического потенциала для контактной поверхности в конечном виде // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1976. № 10. С. 61–71.

*Федорова Н.В., Шапиро В.А., Тюрмина Л.О.* Использование результатов аэромагнитных съемках и выделение длинноволновых геомагнитных аномалий на Урале // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1989. № 4. С. 104–112.

*Халевин Н. И., Алейников А. Л., Колупаева Е. Н., Тиунова А. М., Юнусов Ф. Ф.* О совместном применении продольных и поперечных волн при глубинном сейсмическом зондировании // Геология и геофизика. 1986. № 10. С. 94–98.

*Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 137 с.

*Цидаев А.Г.* Опыт построения трехмерных плотностных моделей по сейсмическим данным // Двенадцатая Уральская молодежная научная школа по геофизике. Пермь, 2011. С. 280–283.

*Цирульский А.В., Никонова Ф.И., Федорова Н.В.* Метод интерпретации гравитационных и магнитных аномалий с построением эквивалентных семейств решений. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1980. 135 с.

Чурсин А.В., Прутьян А.М., Федорова Н.В. Цифровая карта аномального магнитного поля Северного, Среднего и Южного Урала и прилегающих территорий Восточно-Европейской и Западно-Сибирской платформ // Литосфера. 2008. № 6. С. 63–72.

Шванк О.А., Люстих Е.Н. Интерпретация гравитационных наблюдений. М.: Государственное научно-техническое издательство нефтяной и горно-топливной литературы, 1947. 400 с.

Becker, J. J., D. T. Sandwell, W. H. F. Smith, J. Braud, B. Binder, J. Depner, D. Fabre, J. Factor, S. Ingalls, S.-H. Kim, R. Ladner, K. Marks, S. Nelson, A. Pharaoh, R. Trimmer, J. Von Rosenberg, G. Wallace, P. Weatherall. Global Bathymetry and Elevation Data at 30 Arc Seconds Resolution: SRTM30\_PLUS // Marine Geodesy. 2009. 32:4. PP. 355–371. DOI: 10.1080/01490410903297766.

Erwan Thébault, Christopher C Finlay, Ciarán D Beggan et al. International Geomagnetic Reference Field: the 12th generation // Earth, Planets and Space. 2015. PP. 67–79.

Fedorova N. V., Martyshko P.S., Gemaidinov D.V., Rublev A.L., Computer technology for highlighting the magnetic anomalies from the deep layers of the Earth's crust // Geoinformatics: Theoretical and Applied Aspects. 2015. № 14. PP. 1–4. DOI:10.3997/2214-4609.201412426.

Fedorova N. V., Rublev A.L., Ultramafic-mafic massif mapping in the upper horizons of the basement polar sector of Eurasia // 16th International Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM 2016: Conference Proceedings. 2016. Book 1. Vol. 3. PP. 703–710. DOI: 10.5593/SGEM2016/B13/S05.089.

Goetze, H.-J., Lahmeyer, B. Application of three-dimensional interactive modelling in gravity and magnetism // Geophysics. 1988. Vol. 53. No 8. PP. 1096–1108.

International Geomagnetic Reference Field, 1995 Revision. Geophysical Journal International, 125 (1996), 318–321. DOI:10.1111/j.1365-246X.1996.tb06553.x.

Martyshko P.S., Fedorova N.V., Kolmogorova V.V., Ladovskiy I.V. Geophysical models of the Earth's crust structure of the Northern Urals // Society of Petroleum Engineers – 72nd European Association of Geoscientists and Engineers Conference and Exhibition 2010 – Incorporating SPE EUROPEC 2010. Barcelona. 2010. P. 5230–5234. DOI: 10.3997/2214-4609.201401315.

Martyshko P.S., Fedorova N.V., Rublev A.L. Studying the Structural Features of the Geophysical Potential Fields with the Use of Parallel Algorithms // Proceedings of IAMG 2015 The 17th annual conference of the International Association for Mathematical Geosciences. Freiberg, September 5–13. 2015. P. 517–526.

Thébault et al. International Geomagnetic Reference Field: the 12th generation // Earth Planets and Space. 2015. PP. 67–79.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> .....	3
<b>Глава 1. Прямые и обратные задачи потенциальных геофизических полей</b> .....	5
1.1. Сглаживание потенциальных полей по формуле Пуассона (выделение поля от слоя).....	5
1.2. Линейная обратная задача гравиметрии на сетках большой размерности (определение плотности по заданному полю).....	10
1.2.1. Прямая задача гравиметрии для сеточной функции плотности (вычисление значений поля по заданному распределению плотности). Быстрый алгоритм.....	10
1.2.2. Обратная задача гравиметрии для модели слоистых сред (вычисление плотности по известным значениям поля). Итерационный процесс в общем виде.....	14
1.2.3. Обратная задача гравиметрии. Дискретизация.....	16
1.2.4. Обратная задача гравиметрии. Итерационный процесс в дискретном виде.....	17
1.2.5. Тестирование алгоритма решения линейной обратной задачи.....	19
1.3. Структурная обратная задача гравиметрии (определение границы между слоями по заданному полю).....	21
1.3.1. Прямая задача гравиметрии для однородного пласта.....	21
1.3.2. Параметризация слоистой среды.....	23
1.3.3. Обратная задача для контактной поверхности с асимптотической плоскостью.....	26
1.3.4. Обратная задача гравиметрии для многослойных сред.....	29
1.3.5. Модифицированный метод локальных поправок.....	31
<b>Глава 2. Методика построения трехмерной плотностной модели начального приближения</b> .....	35
2.1. Построение двумерной плотностной модели верхней мантии с учетом условия изостатической компенсации на глубине.....	35
2.1.1. Глубинная изостазия, как элемент плотностного моделирования.....	35
2.1.2. Сейсмоплотностная модель по профилю Кварц.....	36
2.1.3. Скоростные модели по сейсмическим профилям.....	42
2.2. Построение трехмерной гравитационной модели начального приближения.....	47
2.2.1. Трехмерная модель интерполированной плотности.....	47
2.2.2. Трехмерная гравитационная модель начального приближения.....	49
<b>Глава 3. Методы и результаты исследования аномального магнитного поля</b> .....	53
3.1. Анализ исходных данных.....	53
3.2. Изучения структурных особенностей магнитных аномалий.....	54
3.3. Аппроксимация аномалий модуля магнитной индукции $\Delta T_a$ набором сингулярных источников.....	59
3.3.1. Математический аппарат.....	60
3.3.2. Методы оптимизации.....	61
3.3.3. Определение компонент аномального магнитного поля приарктической части Уральского региона.....	62
3.3.4. Приведение к полюсу региональных магнитных аномалий.....	63
3.4. Моделирование поверхности раздела намагниченных слоев.....	65
3.4.1. Математический аппарат.....	65
3.4.2. Результат интерпретации региональных магнитных аномалий.....	66
<b>Глава 4. Примеры практической интерпретации (комплексные модели земной коры и верхней мантии приарктической части Уральского региона)</b> .....	67
<b>Заключение</b> .....	87
<b>Список литературы</b> .....	89

Научное издание

**Петр Сергеевич Мартышко  
Игорь Викторович Ладовский  
Наталья Васильевна Федорова  
Денис Дмитриевич Бызов  
Александр Григорьевич Цидаев**

**ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ КОМПЛЕКСНОЙ  
ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ДАННЫХ**

Рекомендовано к изданию ученым советом  
Института геофизики и  
Объединенным ученым советом по наукам о Земле УрО РАН

Редактор **Н.В. Федорова**  
Корректор **Л.Г. Строкина**  
Компьютерная верстка **Л.Г. Строкиной**

ISBN 978-5-7691-2463-1



Подписана в печать 18.11.16. Бумага типографская. Формат 70×100 1/16.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,8. Уч.-изд. л. 11,3.  
Тираж 80 экз. Заказ 212

Оригинал-макет изготовлен в ИГФ УрО РАН  
620016, г. Екатеринбург, ул. Амундсена, 100. Тел: (343) 267-88-68

Отпечатано в типографии ООО «ИРА УТК»  
620089, г. Екатеринбург, ул. Луганская, д. 59/4. Тел. (343) 221-36-06